

# Relativistische Quantenfeldtheorie

Zweisemestrige Wahlpflichtfachvorlesung<sup>1</sup>

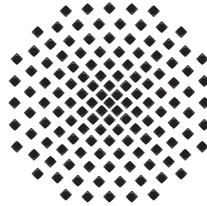
Teil 1

Wintersemester 2009/10

Teil 2

Sommersemester 2010

Ulrich Weiß



II. Institut für Theoretische Physik  
Universität Stuttgart

---

<sup>1</sup>Der Autor dankt Dipl. Phys. Roman Bedau für seine Hilfe bei der Anfertigung des Compuscripts



# Literatur

## Relativistische Quantenmechanik

- Messiah, Band 2
- W. Greiner, Relativistische Quantenmechanik
- Schwabl, QM I
- Bjorken/Drell, Relativistische Quantenmechanik

## Relativistische Quantenfeldtheorie

- M. Srednicki, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 2007
- Itzykson/Zuber, Quantum Fields Theory, Mc Graw-Hill, 1980
- Bjorken/Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie
- Becher/Böhm/Joos, Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung, Teubner, 1981

## Übersicht

- Relativistische Quantenmechanik: Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung
- Relativistische Quantenfeldtheorien für freie Teilchen: Klein-Gordon-, Dirac- und Maxwell-Gleichungen, Propagatoren
- Wechselwirkende Teilchen: Wechselwirkungsbild, S-Matrix, Störungstheorie, Feynman-Diagramme und deren Anwendung in der Quantenelektrodynamik (QED)
- Grundzüge der Renormierungstheorie
- Kovariante Eichtheorien: abelsch ( $U(1)$  QED), nicht-abelsch ( $SU(2)$ ,  $SU(3)$ , ...)
- Quantenchromodynamik (QCD)
- Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung:  
spontane Symmetriebrechung, Goldstone-Mode, Goldstone-Modell, dynamische Massenerzeugung im Higgs-Kibble-Modell, Higgs-Feld und Higgs-Teilchen,  $W^\pm$ - und  $Z^0$ -Bosonen

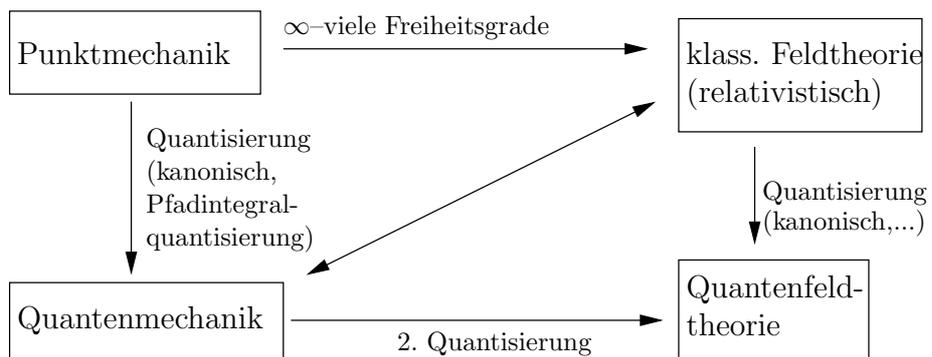


Abbildung 0.1: Einordnung

**Klassische Feldtheorie**

Saitengleichung

Klein-Gordon-Gleichung

Dirac-Gleichung

Maxwell-Gleichung

**Quantisierung**

→

→

→

→

**Teilchen**

Phonon

Meson

Lepton

Photon

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Formale Struktur der Quantentheorie</b>	<b>8</b>
1.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	8
1.1.1	Der unitäre Vektorraum . . . . .	8
1.1.2	Operatoralgebra . . . . .	9
1.2	Die Prinzipien der Quantenmechanik . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Relativistische Quantentheorie</b>	<b>12</b>
2.1	Wie kommt man zu einer Wellengleichung? . . . . .	12
2.2	Die Klein–Gordon–Gleichung . . . . .	13
2.2.1	Heuristische Vorüberlegung . . . . .	13
2.2.2	Relativistische Energie–Impuls–Beziehung . . . . .	16
2.2.3	Eigenschaften der Klein–Gordon–Gleichung . . . . .	16
2.2.4	Mesonen im elektromagnetischen Feld . . . . .	20
2.2.5	Das Klein–Gordon–Feld als Kernpotentialfeld . . . . .	22
2.3	Die Dirac–Gleichung . . . . .	23
2.3.1	Ableitung einer Kontinuitätsgleichung . . . . .	26
2.3.2	Nichtrelativistischer Grenzfall . . . . .	27
2.3.3	Kovarianz der Dirac–Gleichung unter Lorentz–Transformation . . . . .	30
2.3.4	Bilineare Kovariante der Dirac–Theorie . . . . .	35
2.4	Lösung der Dirac–Gleichung für freie Teilchen . . . . .	37
2.4.1	Wellenpakete . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Quantisierung der freien Felder</b>	<b>42</b>
3.1	Kanonische Quantisierung . . . . .	42
3.2	Quantisierung des Klein–Gordon–Feldes . . . . .	46
3.2.1	Das komplexe Skalarfeld . . . . .	46
3.2.2	Der Feynman–Propagator . . . . .	50
3.3	Quantisierung des Dirac–Feldes . . . . .	51
3.3.1	Kanonischer Formalismus . . . . .	51
3.3.2	Der Feynman–Propagator . . . . .	55
3.4	Quantisierung des Maxwell–Feldes . . . . .	56
3.4.1	Die klassischen Feldgleichungen . . . . .	56
3.4.2	Quantisierung in der Strahlungseichung . . . . .	58
3.4.3	Der Feynman–Propagator des Photons . . . . .	60

<b>4</b>	<b>Elementarprozesse</b>	<b>61</b>
4.1	Wechselwirkende Quantenfelder . . . . .	61
4.1.1	Allgemeine Betrachtung . . . . .	61
4.1.2	Das Wechselwirkungsbild . . . . .	63
4.2	Die S-Matrix . . . . .	66
4.3	Das Wicksche Theorem . . . . .	67
4.4	Störungstheorie in der Quantenelektrodynamik . . . . .	69
4.4.1	Regeln für die Feynman-Diagramme . . . . .	69
4.4.2	Elementare Tree-Diagramme . . . . .	73
4.5	Prozesse in 2. Ordnung . . . . .	74
4.5.1	Compton-Streuung: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ . . . . .	74
4.5.2	Bremsstrahlung . . . . .	75
4.5.3	$e^+ + e^-$ -Vernichtung in zwei $\gamma$ . . . . .	75
4.5.4	Paarerzeugung im Coulombpotenzial . . . . .	76
4.5.5	Møller-Streuung ( $e^- + e^-$ -Streuung) . . . . .	76
4.5.6	Bhabha-Streuung ( $e^+ + e^-$ -Streuung) . . . . .	77
4.5.7	$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ . . . . .	77
4.5.8	$e^+ + e^- \rightarrow$ Hadronen . . . . .	78
4.6	Bhabha-Streuung in 4. Ordnung . . . . .	80
4.6.1	Konvergente Diagramme . . . . .	80
4.6.2	Diagramme mit Strahlungskorrektur des Vertex . . . . .	82
4.6.3	Diagramme mit Selbstenergie-Korrektur des Leptons . . . . .	83
4.6.4	Diagramme mit Vakuum-Polarisation des Photons . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Grundlagen der Renormierungstheorie</b>	<b>84</b>
5.1	Ein-Loop-Renormierung . . . . .	84
5.1.1	Vakuum-Polarisation . . . . .	84
5.1.2	Strahlungskorrektur des Dirac-Propagators . . . . .	87
5.1.3	Vertex-Renormierung . . . . .	89
5.2	Bedingungen für die Renormierbarkeit von Feldtheorien . . . . .	91
5.2.1	Divergenzgrad von 1p-irreduziblen Diagrammen . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Abelsche U(1)-Eichtheorien</b>	<b>96</b>
6.1	Globale Eichinvarianz, Erhaltung der Ladung . . . . .	96
6.2	Lokale Eichinvarianz und Wechselwirkung . . . . .	96
6.3	Dynamische Massenerzeugung in Eichtheorien . . . . .	99
6.3.1	Spontane Symmetrie-Brechung im U(1)-Goldstone-Modell . . . . .	99
6.3.2	Das Higgs-Kibble-Modell . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Nichtabelsche (Yang-Mills)-Eichtheorien</b>	<b>103</b>
7.1	Die Symmetriegruppe $SU(N)$ . . . . .	103
7.1.1	Globale Eichinvarianz . . . . .	105
7.1.2	Lokale Eichinvarianz . . . . .	105

7.2	Quantenchromodynamik . . . . .	106
7.2.1	Phänomenologische Grundlagen . . . . .	106
7.2.2	Dynamische $SU(3)_{\text{Colour}}$ -Symmetrie . . . . .	111
<b>8</b>	<b>Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung</b>	<b>115</b>
8.1	Die universelle Fermi-Wechselwirkung . . . . .	115
8.1.1	Elektromagnetische und schwache Wechselwirkung der Leptonen . .	116
8.1.2	Elektromagn. und schwache Wechselwirkung der Hadronen . . . . .	120
8.1.3	Neutraler schwacher Strom . . . . .	121
8.2	Das Glashow-Salam-Weinberg-Modell . . . . .	122
8.2.1	Notwendigkeit einer nichtabelschen Eichtheorie . . . . .	122
8.2.2	Spontane Symmetriebrechung in der GSW-Theorie . . . . .	124

# 1 Formale Struktur der Quantentheorie

## 1.1 Mathematische Grundlagen

### 1.1.1 Der unitäre Vektorraum

$U_N$  sei ein komplexwertiger, linearer,  $N$ -dimensionaler Vektorraum.

- Elemente  $|\varphi\rangle, |\chi\rangle, |\psi\rangle, |0\rangle$
- Addition  $|\varphi\rangle + |\chi\rangle = |\psi\rangle \in U_N$
- Multiplikation mit komplexer Zahl  $c|\varphi\rangle = |\psi\rangle \in U_N$  und  $c \in \mathbb{C}$
- Skalarprodukt  $\langle\varphi|\chi\rangle = \langle\chi|\varphi\rangle^* = c$

Die Norm von  $\varphi$  ist durch das Skalarprodukt gegeben (übliche Wahl  $\|\varphi\| = 1$ )

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle} = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle^*} . \quad (1.1)$$

Der unitäre Vektorraum besitzt eine orthonormierte, vollständige Basis,

$$\langle e_\alpha | e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} , \quad (1.2)$$

$$\mathbb{1} = \sum_{\alpha} |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha| . \quad (1.3)$$

Dann gilt der Entwicklungssatz

$$|\phi\rangle = \mathbb{1} |\phi\rangle = \sum_{\alpha} |e_\alpha\rangle \underbrace{\langle e_\alpha | \phi \rangle}_{=: c_\alpha} = \sum_{\alpha} c_\alpha |e_\alpha\rangle . \quad (1.4)$$

Für eine kontinuierliche Basis lautet die Orthonormierungsbedingung

$$\langle e(\alpha) | e(\alpha') \rangle = \delta(\alpha - \alpha') , \quad (1.5)$$

und die Vollständigkeitsrelation besitzt die Form

$$\mathbb{1} = \int d\alpha |e(\alpha)\rangle \langle e(\alpha)| . \quad (1.6)$$

## 1.1.2 Operatoralgebra

### a) Lineare Operatoren:

Es seien  $|\varphi\rangle, |\chi\rangle, |\phi\rangle$  Elemente eines unitären Vektorraums  $U_N$  und  $c \in \mathbb{C}$  eine beliebige komplexe Zahl. Für lineare Operatoren  $\hat{A}$  gilt

$$\begin{aligned}\hat{A}|\varphi\rangle &= |\phi\rangle, \\ \hat{A}|\varphi + \phi\rangle &= \hat{A}|\varphi\rangle + \hat{A}|\phi\rangle, \\ \hat{A}|c\phi\rangle &= c\hat{A}|\phi\rangle.\end{aligned}\tag{1.7}$$

### b) Spezielle Operatoren:

Eigenschaften bzw. Definitionsgleichungen einiger spezieller Operatoren

- adjungierter Operator  $\hat{A} \rightarrow \hat{A}^\dagger$   
im Skalarprodukt gilt

$$\langle \chi | \hat{A} \varphi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \chi | \varphi \rangle\tag{1.8}$$

- selbstadjungierter/hermitescher Operator  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$
- inverser Operator  $\hat{A} \rightarrow \hat{A}^{-1}$

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{\mathbb{1}} = \hat{A}^{-1}\hat{A}\tag{1.9}$$

- unitärer Operator  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$

$$\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{\mathbb{1}} = \hat{A}^\dagger\hat{A}\tag{1.10}$$

$$\langle \hat{U}\varphi | \hat{U}\chi \rangle = \langle \varphi | \underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{\hat{\mathbb{1}}} \chi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle\tag{1.11}$$

### c) Darstellung von Operatoren:

Mit der Vollständigkeitsrelation der Basis,  $\mathbb{1} = \sum_\alpha |e_\alpha\rangle \langle e_\alpha|$ , lassen die zuvor genannten Operatoren die folgende Darstellung in der Basis  $\{|e_\alpha\rangle\}$  zu:

- lineare Operatoren

$$\hat{A} = \mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1} = \sum_\alpha \sum_\beta |e_\alpha\rangle \underbrace{\langle e_\alpha | \hat{A} | e_\beta \rangle}_{=: A_{\alpha\beta}} \langle e_\beta| = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} |e_\alpha\rangle \langle e_\beta|\tag{1.12}$$

- spezielle Operatoren

$$\begin{aligned}- \text{adjungierter Operator} & \quad A_{\alpha\beta}^\dagger = A_{\beta\alpha}^* \\ - \text{hermitescher Operator} & \quad A_{\beta\alpha}^* = A_{\alpha\beta} \\ - \text{unitärer Operator} & \quad \sum_\beta A_{\beta\alpha}^* A_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}\end{aligned}$$

Die Eigenwertgleichung des linearen Operators  $\hat{A}$  lautet:

$$\hat{A}|a_\lambda\rangle = A_\lambda|a_\lambda\rangle . \quad (1.13)$$

Hermiteische Operatoren,  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ , besitzen reelle Eigenwerte,

$$A_\lambda = A_\lambda^* , \quad (1.14)$$

und orthogonale, normierbare Eigenvektoren,

$$\langle a_\lambda|a_{\lambda'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} . \quad (1.15)$$

Im Entartungsfall können die Eigenvektoren stets orthogonal gewählt werden (Schmidt-sches Orthogonalisierungsverfahren).

Analytische Funktionen des Operators  $\hat{A}$  lassen sich in seiner Eigenbasis wie folgt darstellen,

$$\hat{F}(\hat{A})|a_\lambda\rangle = F(A_\lambda)|a_\lambda\rangle . \quad (1.16)$$

## 1.2 Die Prinzipien der Quantenmechanik

**1. Axiom:** Jeder Observablen ist ein eindeutiger linearer hermitescher Operator zugeordnet,

$$\text{Observable} \leftrightarrow \text{linearer hermitescher Operator} , \quad (1.17)$$

$$O \leftrightarrow \hat{O} \quad \text{wobei} \quad \hat{O}^\dagger = \hat{O} . \quad (1.18)$$

Beispiele für Observable und ihre Operatoren:

$$\begin{aligned} E &\longleftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} , \\ p_i &\longleftrightarrow \hat{p}_i , \\ q_i &\longleftrightarrow \hat{q}_i . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hierbei erfüllen die Operatoren  $\hat{p}_k$  und  $\hat{q}_j$  die Kommutatorbeziehung

$$[\hat{p}_k, \hat{q}_j] = -i\hbar\delta_{kj}\hat{1} . \quad (1.20)$$

**2. Axiom:** Die Eigenfunktion zu einem vollständigem Satz vertauschbarer Operatoren spannen einen unitären Vektorraum auf. Das physikalische System wird durch einen normierbaren Zustandsvektor  $|\psi\rangle$  vollständig charakterisiert. Im Folgenden wählen wir die Normierung  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Ein reiner Zustand beschreibt ein Ensemble von physikalischen Systemen, welche alle durch den selben Zustandsvektor  $|\phi\rangle$  charakterisiert sind.

### 3. Axiom: Messwerte, Erwartungswerte

Sei  $\hat{\Omega}^{(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , ein vollständiger Satz kommutierender Operatoren mit den Eigenwertgleichungen

$$\hat{\Omega}^{(i)} |\psi_{n_i}^{(i)}\rangle = \omega_{n_i}^{(i)} |\psi_{n_i}^{(i)}\rangle, \quad \langle \psi_{n_i}^{(i)} | \psi_{n'_j}^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{n_i n'_i}, \quad (1.21)$$

und sei

$$|\psi\rangle = a_n |\psi_n\rangle \quad \text{mit} \quad |\psi_n\rangle = \prod_{i=1}^N |\psi_{n_i}^{(i)}\rangle \quad \text{und} \quad n = (n_1, \dots, n_N). \quad (1.22)$$

a) Der zahlenmäßige Wert einer individuellen präzisen Messung einer Observablen  $\Omega^{(i)}$  ist irgendein Eigenwert  $\omega_{n_i}^{(i)}$  des zugehörigen Operators  $\hat{\Omega}^{(i)}$ .

b)  $|a_i|^2$  ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer präzisen Messung des Observablensatzes  $\{\Omega^{(i)}\}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , die Messwerte  $\omega_{n_i}^{(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , zu messen; d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass das System sich im Eigenzustand  $|\psi_n\rangle = \prod_{i=1}^N |\psi_{n_i}^{(i)}\rangle$  befindet.

c) Mittelwert:  $\langle \hat{\Omega}^{(i)} \rangle = \langle \psi | \hat{\Omega}^{(i)} | \psi \rangle = \sum_{n_i} |a_i|^2 \omega_{n_i}^{(i)}$

d) Unschärfe:  $\Delta\Omega^{(i)} = \sqrt{\langle \psi | \hat{\Omega}^{(i)2} | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{\Omega}^{(i)} | \psi \rangle^2}$

### 4. Axiom: Dynamik konservativer Systeme

Im Schrödingerbild entspricht die zeitliche Entwicklung des quantenmechanischen Systems wegen der zeitlichen Erhaltung der Norm einer „unitären Drehung“ des Zustandsvektors  $|\psi(t)\rangle$ . Diese wird durch die Schrödingergleichung beschrieben,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) |\psi(t)\rangle. \quad (1.23)$$

Diese Gleichung hat für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator die formale Lösung

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t - t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (1.24)$$

mit dem unitären Zeitentwicklungsoperator

$$\hat{U}(t - t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t_0)\right\}. \quad (1.25)$$

Der Übergang zum Heisenberg- bzw. Wechselwirkungsbild erfolgt ebenfalls durch eine unitäre Transformation.

## 2 Relativistische Quantentheorie

### 2.1 Wie kommt man zu einer Wellengleichung?

Aus der nichtrelativistischen Energie–Impuls–Beziehung

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (2.1)$$

und den allgemein gültigen Teilchen–Welle Beziehungen von de Broglie

$$E = \hbar\omega \quad \text{und} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (2.2)$$

folgt unmittelbar die Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}. \quad (2.3)$$

In Energieeinheiten schreibt sich die Dispersionsrelation (2.3) als  $\hbar\omega = \hbar^2\vec{k}^2/(2m)$ .

Partikuläre Lösungen einer linearen Wellengleichung haben die Gestalt

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) \approx e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.4)$$

Für ebene Wellen in der Form (2.4) gelten – wie unmittelbar einsichtig ist – die Jordanschen Regeln

$$\boxed{\begin{array}{l} i \frac{\partial}{\partial t} \quad \longleftrightarrow \quad \omega, \\ -i \vec{\nabla} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{k}. \end{array}} \quad (2.5)$$

Die der Dispersionsrelation (2.3) entsprechende lineare Wellengleichung lautet somit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} \psi(\vec{r}, t). \quad (2.6)$$

Im relativistischen Fall hat die Energie–Impuls–Beziehung die Gestalt

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}, \quad (2.7)$$

bzw. in quadrierter Form

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2. \quad (2.8)$$

Setzt man in letztere Beziehung die Jordanschen Entsprechungen ein, gewinnt man die sog. Klein–Gordon–Gleichung für ein skalares Wellenfeld  $\Phi(\vec{r}, t)$ ,

$$\boxed{\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi(\vec{r}, t) = 0}. \quad (2.9)$$

## 2.2 Die Klein–Gordon–Gleichung

### 2.2.1 Heuristische Vorüberlegung

Wendet man die Jordanschen Regeln

$$E \longleftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{p} \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (2.10)$$

auf die nichtrelativistische Energie–Impuls Beziehung an,

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \iff -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t), \quad (2.11)$$

so erhält man die zeitabhängige, unter Galilei–Transformationen invariante Schrödinger–gleichung.

#### 1. Einsteinsches Relativitätsprinzip:

Das Einsteinsche Relativitätsprinzip macht generelle Aussagen über die Form allgemeingültiger Naturgesetze in Inertialsystemen. Inertialsysteme sind Raum–Zeit–Koordinatensysteme, die sich relativ zueinander gleichförmig (d.h. mit konstanter Relativgeschwindigkeit) bewegen und durch eine Lorentz–Boost–Transformation ineinander überführt werden können. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip besagt, dass es prinzipiell unmöglich ist, ein bestimmtes Inertialsystem in irgendeiner Weise vor anderen auszuzeichnen. Daraus folgt, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen in gleicher Form formulierbar sein müssen. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip fordert somit die Forminvarianz der Naturgesetze unter Lorentz–Transformationen. Diese Forminvarianz wird allgemein als Lorentz–Kovarianz der Naturgesetze bezeichnet.

#### 2. Homogene Lorentz–Transformation:

Definition des kontra- und kovarianten Vierervektors:

kontravarianter Vierervektor  $x^\mu$

kovarianter Vierervektor  $x_\mu$

$$x^\mu := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x_\mu := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

#### 3. Minkowski–Raum:

Der Minkowski-Raum ist der mathematische Raum des Raum–Zeit–Kontinuums. Er ist ein vierdimensionaler, reeller, metrischer Vektorraum, der den dreidimensionalen Ortsraum als Euklidischen Unterraum enthält. Das Skalarprodukt des Raum–Zeit–Vierervektors  $x^\mu$  besitzt die Form

$$x_\mu x^\mu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Somit besitzt der metrische Tensor des Minkowski-Raums die Form

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Der metrische Tensor, in welchem beide Indices oben oder unten stehen, ist zu unterscheiden von dem Einheitstensor, in welchem die Indices abwechselnd oben/unten oder unten/oben stehen,

$$g^{\mu}_{\nu} = g_{\mu}^{\nu} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Anmerkung:

Der Minkowski-Metrik wird Genüge geleistet, indem wir die verallgemeinerte Summenkonvention für die Skalarprodukt-Bildung verwenden. In dieser Konvention wird über doppelt vorkommende Lorentz-Indices summiert, wobei der eine Index oben bzw. unten und der andere Index unten bzw. oben stehen muss. Das Herauf- bzw. Herunterziehen von Lorentz-Indices geschieht mit Hilfe des metrischen Tensors, also z.B.,

$$a^{\mu\nu} = a^{\mu}_{\rho} g^{\rho\nu}, \quad a_{\mu\nu} = a_{\mu}^{\rho} g_{\rho\nu}, \quad a_{\mu}^{\nu} = a_{\mu\rho} g^{\rho\nu}, \quad a^{\mu}_{\nu} = a^{\mu\rho} g_{\rho\nu}.$$

Wir können kontra- bzw. kovariante Vierervektoren also auch wie folgt schreiben,

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= g^{\mu\nu} x_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ x_{\mu} &= g_{\mu\nu} x^{\nu} = g_{\mu}^{\nu} x_{\nu} \end{aligned}. \quad (2.15)$$

Die homogene Lorentz-Transformation beschreibt die Transformation der Koordinaten  $x^{\mu}$  beim Übergang vom Inertialsystem  $S$  in das Inertialsystem  $S'$ ,

$$S \rightarrow S' \quad (2.16)$$

Die Homogenität von Raum und Zeit bedingt den linearen Ansatz

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = a^{\mu\nu} x_{\nu}, \\ x'_{\mu} &= a_{\mu\nu} x^{\nu} = a_{\mu}^{\nu} x_{\nu}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei  $a^{\mu}_{\nu} = a^{\mu\rho} g_{\rho\nu}$ .

Experimenteller Befund: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen.

Hieraus folgt zwingend:

- Die Raum und Zeit zugrunde liegende Metrik ist die nicht-euklidische sog. Minkowski-Metrik mit differentiellem Abstandselement  $ds$ , wobei gilt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = \underbrace{g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}_{= dx^\nu} . \quad (2.18)$$

- Das Abstandselement ist eine Invariante in allen Inertialsystemen, d.h.,

$$ds'^2 \stackrel{!}{=} ds^2 , \quad \text{und folglich auch} \quad \boxed{x'^\nu x'_\nu = x^\mu x_\mu} . \quad (2.19)$$

Da nun  $x^\mu$  beliebig ist, folgt hieraus die Matrixrelation (ohne bzw. mit Index-Schreibweise),

$$\begin{aligned} \tilde{a}ga &= g , \\ \tilde{a}^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} a^\sigma_\nu &= g^\mu_\nu . \end{aligned}$$

Die homogene 6-parametrische Lorentz-Gruppe besitzt als Untergruppen

- die 3-parametrische Gruppe  $O(3)$  der reinen Raumdrehungen. Hierbei wird die Zeit nicht transformiert. Die Parameter der Untergruppe sind die Drehwinkel  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .
- die 3-parametrische Gruppe der sog. Lorentz-Booster, welche den Übergang zwischen relativ zueinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen (Inertialsystemen) beschreiben und bei denen die Zeit ebenfalls transformiert wird. Die Geschwindigkeitsparameter  $v_1, v_2, v_3$  charakterisieren Booster in  $x_1$ -,  $x_2$ -, und  $x_3$ -Richtung.

Eine allgemeine homogene Lorentz-Transformation kann in eine Abfolge von Raumdrehungen und Boosts beschrieben werden. Für den Fall einer reinen Raumdrehung wird auf den weiter unten stehenden Ausdruck (2.146) verwiesen.

### Lorentz-Boost in x-Richtung:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} , \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} , \quad (2.20)$$

auch darstellbar als „Drehung“ in der  $(t, x)$ -Ebene mit „imaginärem“ Winkel  $\varphi = iu$ ,

$$\tanh u = v/c , \quad (2.21)$$

$$t' = t \cosh u - \frac{x}{c} \sinh u , \quad x' = x \cosh u - ct \sinh u . \quad (2.22)$$

Richtungsableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} =: \partial_\mu . \quad (2.23)$$

Die Ableitung nach einem kontravarianten Vektor verhält sich wie ein kovarianter Vektor,

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde{a}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = a_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} , \quad (2.24)$$

somit also 
$$\partial'_\mu = a_\mu{}^\nu \partial_\nu = a_{\mu\nu} \partial^\nu, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \\ &= \partial'_\mu \partial'^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta'. \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.2.2 Relativistische Energie–Impuls–Beziehung

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p^\mu p_\mu &= m^2 c^4, \\ p'^\mu &= a^\mu{}_\nu p^\nu, \\ E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Jordanschen Regeln:

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{p} \leftrightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (2.29)$$

lassen sich zur kovarianten Form wie folgt zusammenfassen,

$$p^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu = i\hbar \partial^\mu \quad \text{bzw.} \quad p_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu = i\hbar \partial_\mu, \quad (2.30)$$

mit den Ableitungen

$$\partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(ct)} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(ct)} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.31)$$

$\Rightarrow$  Klein–Gordon–Gleichung (1926)

$$[\partial_\mu \partial^\mu + R^{-2}] \Phi(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{mit der Comptonwellenlänge} \quad R = \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.32)$$

## 2.2.3 Eigenschaften der Klein–Gordon–Gleichung

Erhaltungssatz in lokaler Form:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (2.33)$$

mit dem Viererstromdichtevektor

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Welche Form nimmt nun  $j^\mu$  für die Klein–Gordon–Gleichung ein ?

Anfangsbedingungen: Da die Dgl. von 2.Ordnung in der Zeit ist, können  $\Phi(x, t = 0)$  und  $\dot{\Phi}(x, t = 0)$  beliebig vorgegeben werden,

$$\Phi(\vec{x}, t = 0) = \Phi(\vec{x}), \quad \dot{\Phi}(\vec{x}, t = 0) = \dot{\Phi}(\vec{x}). \quad (2.35)$$

Zu lösen: 
$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi(x^\nu) = 0. \quad (2.36)$$

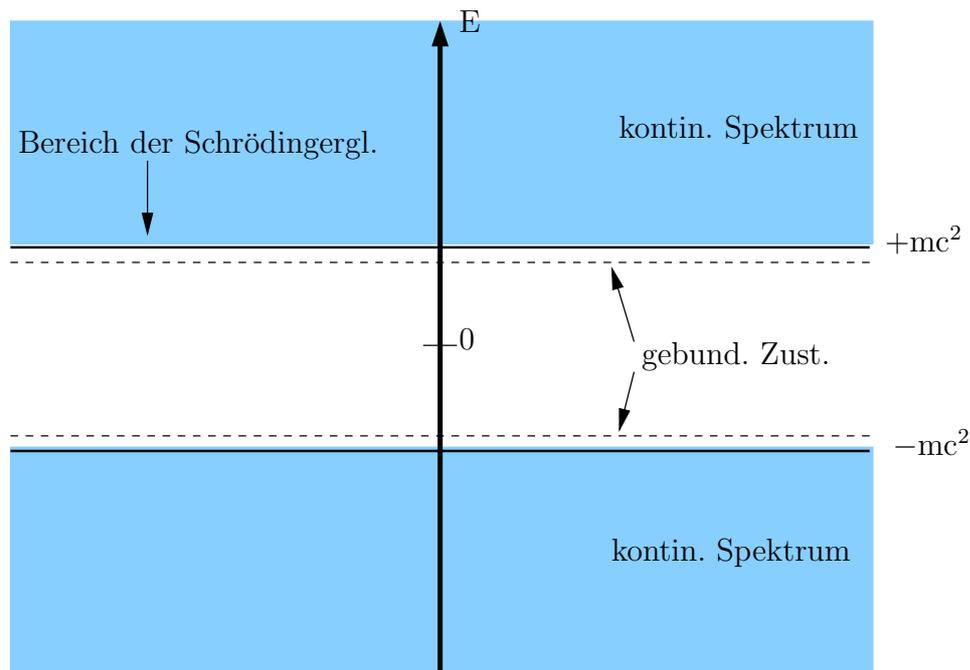
Das Skalarfeld  $\Phi$  ist invariant unter Lorentz–Transformationen zwischen Inertialsystemen, also unter Transformationen der Art

$$S \rightarrow S', \quad x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu. \quad (2.37)$$

Invarianzbedingung:

$$\Phi'(x'^\nu) = \Phi(x^\nu). \quad (2.38)$$

Die jedem Raumzeit–Punkt  $x^\nu$  durch das Skalarfeld  $\Phi(x^\nu)$  zugeordnete komplexe Zahl ist also in jedem Inertialsystem die selbe Zahl.



Stabilitätsproblem  
(Energieabgabe bis zur Energie  $E \rightarrow -\infty$  möglich)

Abbildung 2.1: Quadrierung der Energie–Impuls–Beziehung

**Kontinuitätsgleichung** für substanzartige Größen  
(Wahrscheinlichkeit, Ladung, Masse, ...)

$$\frac{d}{dt} \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t) = 0 . \quad (2.39)$$

Vermöge des Gaußschen Satzes führt diese integrale Form auf die lokale differentielle Beziehung

$$\boxed{\dot{\rho} + \text{div}\vec{j} = 0 .} \quad (2.40)$$

Mit Einführung des entsprechenden Vierervektors  $j^\mu$  (Nullkomponente  $j^0 = c\rho$ ) ist die linke Seite gerade die Viererdivergenz der Viererstromdichte,

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0 .} \quad (2.41)$$

Herleitung aus der Klein–Gordon–Wellengleichung:

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi = 0 , \quad (2.42)$$

$$\text{komplex konjugierte Gleichung} \quad \left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi^* = 0 . \quad (2.43)$$

Multipliziere zunächst Gl. (2.42) von links mit  $\Phi^*$ ,

$$\Phi^* \left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi = 0 , \quad (2.44)$$

und multipliziere anschließend Gl. (2.43) von links mit  $\Phi$ ,

$$\Phi \left[ \partial_\mu \partial^\mu + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Phi^* = 0 . \quad (2.45)$$

Bildet man nun die Differenz  $\frac{i\hbar}{2m}[(2.44) - (2.45)]$ , dann ergibt sich

$$\frac{i\hbar}{2m} \partial_\mu [\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*] = 0 = \partial_\mu j^\mu . \quad (2.46)$$

Somit folgt für die „Substanz“-Dichte  $\rho$  und die „Substanz“-Stromdichte  $\vec{j}$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[ \Phi^* \dot{\Phi} - \dot{\Phi}^* \Phi \right] , \quad (2.47)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left[ \Phi^* \text{grad} \Phi - (\text{grad} \Phi^*) \Phi \right] , \quad (2.48)$$

zusammengefasst also: (hier hat  $\Phi$  die physikal. Dimension  $1/\sqrt{\text{Volumen}}$  !!)

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} [\Phi^* \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi)^* \Phi] . \quad (2.49)$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass für ein reelles Skalarfeld ( $\Phi = \Phi^*$ )  $j^\mu(\vec{x}, t) = 0$  gilt. Wegen der beliebig vorgebbaren Anfangsbedingung (2.35) ist die „Substanz“-Dichte (2.47) nicht positiv definit. Dies ist auch unmittelbar aus der Modenentwicklung einsichtig!

**Modenentwicklung:** hier  $c=1$  !

(Anm.: Für spätere Zwecke wählen wir die physikalische Dimension von  $\Phi(\vec{x}, t)$  derart dass  $\int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t)$  dimensionslos ist, wobei  $\rho = (i/2)[\Phi^*\dot{\Phi} - \dot{\Phi}^*\Phi]$  gewählt wird.)

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k \delta(k_\mu k^\mu - m^2) b(k_0, \vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} . \quad (2.50)$$

Mit der Lorentz-invarianten Aufspaltung in Zustände positiver und negativer Energie gemäß

$$\delta(k_\mu k^\mu - m^2) = \Theta(k_0) \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \delta(k^0 - \omega_{\vec{k}}) + \Theta(-k_0) \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \delta(k^0 + \omega_{\vec{k}}) , \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2} ,$$

erhalten wir  $\Phi(\vec{x}, t) = \Phi^{(+)}(\vec{x}, t) + \Phi^{(-)}(\vec{x}, t)$  mit

$$\Phi^{(\pm)}(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} b(\pm\omega_{\vec{k}}, \pm\vec{k}) e^{\mp i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\cdot\vec{x})} .$$

Für spätere Zwecke geben wir nun die kovariante Formulierung auf, indem wir setzen

$$b(\omega_{\vec{k}}, \vec{k}) = \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k}} , \quad b(-\omega_{\vec{k}}, -\vec{k}) = \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} c_{\vec{k}}^* .$$

Somit lautet die Modenentwicklung

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} [a_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + c_{\vec{k}}^* f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t)] , \quad (2.51)$$

$$\Phi^*(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} [a_{\vec{k}}^* f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) + c_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\vec{x}, t)] , \quad (2.52)$$

mit

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{-ik_\mu x^\mu} . \quad (2.53)$$

Orthonormierungsbedingungen (beachte die Definition von  $\rho$  in Gl. (2.47))

$$\int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{\vec{k}'}(\vec{x}, t) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') , \quad (2.54)$$

$$\int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{\vec{k}'}(\vec{x}, t) = 0 , \quad (2.55)$$

$$\int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_t f_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) = 0 ,$$

wobei das Ableitungssymbol  $\overleftrightarrow{\partial}_t$  wie folgt wirkt:  $a \overleftrightarrow{\partial}_t b = a \partial_t b - (\partial_t a) b$ .

Die entsprechenden Umkehrrelationen lauten

$$a_{\vec{k}} = \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi(\vec{x}, t), \quad (2.56)$$

$$c_{\vec{k}} = \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \Phi^*(\vec{x}, t). \quad (2.57)$$

In der Modendarstellung erhält  $\int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t)$  die Form

$$\int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} [a_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} - c_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^*]. \quad (2.58)$$

Dieser Ausdruck ist nicht positiv definit. Somit bricht die in der nichtrelativistischen Quantenmechanik logisch konsistente Wahrscheinlichkeitsinterpretation von  $\rho(\vec{x}, t)$  für die Klein-Gordon-Gleichung zusammen. Diese unerwünschte Eigenschaft führte historisch zu einem 7-jährigen *knock-out* der Klein-Gordon Gleichung.

Heilung: Im Rahmen der quantenfeldtheoretischen Beschreibung des Klein-Gordon Feldes wird  $e\rho(\vec{x}, t)$  als Ladungsdichte einer Ansammlung von Teilchen und Antiteilchen reinterpretiert.

Anmerkungen:

- Ein allgemeines Wellenpaket ist eine Superposition von Energieeigenzuständen mit positiven und negativen Energieeigenwerten.
- Die Ortsunschärfe des Wellenpakets in Relation zur Comptonwellenlänge  $\lambda = \hbar/(mc)$  bestimmt das Ausmaß relativistischer Effekte und der Beimischung negativer Energiezustände im Wellenpaket eines Teilchens mit positivem Energieerwartungswert.

## 2.2.4 Mesonen im elektromagnetischen Feld

Zur Berücksichtigung der Wechselwirkung eines klassischen relativistischen Teilchens der Ladung  $q$  mit dem elektromagnetischen Feld ersetzt man den mechanischen Viererimpuls  $p^\mu$  gemäß der sog. *Minimalsubstitution*,

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t). \quad (2.59)$$

Auf der quantenmechanischen Ebene wird der Impulsoperator entsprechend durch den "elektromagnetischen" Impulsoperator ersetzt,

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{q}{c} A^\mu(\vec{x}, t) \quad (2.60)$$

$$\text{bzw.} \quad \hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{q}{c} \hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \quad (2.61)$$

je nachdem, ob man das angekoppelte elektromagnetische Feld klassisch oder quantenmechanisch beschreiben möchte. Das elektromagnetische Feld ist invariant unter Eichtransformationen der elektromagnetischen Potentiale (siehe Abschnitt 3.4.1),

$$A^\mu(\vec{x}, t) \rightarrow A'^\mu(\vec{x}, t) = A^\mu(\vec{x}, t) + \partial^\mu \Lambda(\vec{x}, t). \quad (2.62)$$

**Was versteht man unter einer Eichtransformation?** Ausgangspunkt der folgenden Überlegung ist, dass das Materiefeld  $\Phi(\vec{x}, t)$ , da es komplexwertig ist, keine beobachtbare Größe beschreibt. Somit sollte die Physik nicht von der speziellen Wahl der Phase abhängen, d.h. invariant sein unter der lokalen Phasentransformation des Materiefeldes

$$\Phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \Phi'(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) e^{-i(q/\hbar c)\Lambda(\vec{x}, t)}. \quad (2.63)$$

Die Phase sollte für jeden Raum–Zeit–Punkt individuell gewählt werden dürfen. Der raum-/zeitabhängige Phasenfaktor führt nun aber zu zusätzlichen Termen in der Wellengleichung für  $\Phi(\vec{x}, t)$ , die explizit von den Ableitungen der Phase abhängen. Um diese derart erhaltenen „Strafterme“ zu kompensieren, koppelt man sog. Eichfelder (d.h. die elektromagnetischen Potentiale), welche selbst wiederum der Eichtransformation (2.62) genügen, an das ursprünglich betrachtete System an. Mit der Minimalsubstitution (2.60) nimmt die Klein–Gordon–Gleichung die folgende Form an

$$\frac{1}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{iq}{\hbar} \varphi(\vec{x}, t) \right]^2 \Phi(\vec{x}, t) - \left[ \vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right]^2 \Phi(\vec{x}, t) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Phi(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.64)$$

wobei

$$A^\mu(\vec{x}, t) := \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}, t) \\ \vec{A}(\vec{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Gleichung (2.64) beschreibt ein skalares relativistisches Teilchen in einem von außen angelegten elektromagnetischen Feld. Falls das elektromagnetische Potential dynamisch zustande kommt, genügt es in der Lorentz–Eichung,  $\partial_\nu A^\nu(\vec{x}, t) = 0$ , der inhomogenen Wellengleichung, wobei  $j^\mu$  die Stromdichte (2.49) des Materiefeldes darstellt,

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(\vec{x}, t) = j^\mu(\vec{x}, t). \quad (2.66)$$

Die resultierenden gekoppelten Differentialgleichungen für  $\Phi$  und  $A^\mu$  sind nichtlinear!

Die aus der Minimalsubstitution folgende Gleichung (2.64) gewährleistet die Invarianz aller physikalischen Observablen unter der kombinierten Eichtransformation (2.62) und (2.63). Hierzu später mehr.

**Bindungsenergien des Klein–Gordon Teilchens im attraktiven Coulomb–Potential** Separation der Zeitabhängigkeit als Phasenfaktor und Partialwellenansatz

$$\Phi(\vec{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) \frac{1}{r} R_{n, \ell}(r)$$

führt auf die statische radiale Klein–Gordon Gleichung ( $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ )

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2[\ell(\ell+1) - (Z\alpha)^2]}{2mr^2} - \frac{E}{mc^2} \frac{Ze^2}{r} - \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} \right\} R_{n, \ell}(r) = 0$$

Aus den Korrespondenzrelationen mit der radialer Schrödinger Gleichung:

$$\ell(\ell + 1) \leftrightarrow \ell(\ell + 1) - (Z\alpha)^2, \quad Z \leftrightarrow \frac{E}{mc^2} Z, \quad E^{(\text{nr})} \leftrightarrow \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2},$$

folgt unmittelbar für die Bindungsenergien

$$E_n^{(\text{nr})} = -\frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} mc^2 \longrightarrow E_{n,\ell} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - \ell - 1/2 + [(\ell + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2}\right)^2}\right)^{1/2}}.$$

- Die  $\ell$ -Entartung ist in der relativistischen Kinematik aufgehoben (klassisch: Rosettenbahnen anstatt geschlossener Bahnen)
- Für  $Z\alpha > \frac{1}{2}$ , d.h.  $Z > 68$  gibt es für den  $1s$ -Zustand keinen reellen Eigenwert. Entsprechend gibt es für  $Z\alpha > \frac{3}{2}$  keinen reellen Eigenwert für den  $1p$ -Zustand, etc. Ursache hierfür ist, dass die Radialwellenfunktion ab diesem Schwellenwert komplex wird und als Folge davon die Hermitizität des radialen Hamiltonians zusammenbricht.
- Die Entwicklung nach Potenzen von  $Z\alpha$  ergibt

$$E_{n,\ell} = mc^2 \left\{ 1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^4} \left( \frac{n}{\ell + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right\}$$

## 2.2.5 Das Klein–Gordon–Feld als Kernpotentialfeld

**Maxwell–Feld:** Elektrostatistisches Potentialfeld einer Punktladung

$$\text{Poisson–Gleichung} \quad \Delta\varphi(\vec{x}) = -4\pi q \delta^3(\vec{x}) \quad (2.67)$$

$$\varphi(\vec{x}) = -4\pi q \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{-k^2} = \frac{q}{|\vec{x}|}. \quad (2.68)$$

**Statisches Mesonenfeld:** Kernpotential einer hadronischen Punktladung

$$\left( \Delta - \frac{1}{R^2} \right) \Phi(\vec{x}) = -4\pi g \delta^3(\vec{x}) \quad (2.69)$$

$$\Phi(\vec{x}) = 4\pi g \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 + \frac{1}{R^2}} = \frac{g}{|\vec{x}|} e^{-|\vec{x}|/R}. \quad (2.70)$$

Dies ist das Yukawa–Potentialfeld. Es besitzt eine charakteristische Reichweite  $R = \frac{\hbar}{mc}$ .

Das Kernpotential hat eine Reichweite von  $R \approx 10^{-13}$  cm, d.h.  $R \approx 1f$  (Fermi).

Entsprechende Masse  $m \approx 140$  MeV/ $c^2$  (Pionen).

## 2.3 Die Dirac–Gleichung

Da die Klein–Gordon–Gleichung sich als physikalisch unbefriedigend herausstellte, konstruierte Dirac im Jahr 1928 eine Wellengleichung von 1. Ordnung in der Zeit. Hierbei setzte er als Ziel, dass die resultierende Wellengleichung ebenso wie die Schrödinger Gleichung eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte impliziert. Aus der Forderung der Lorentz–Kovarianz folgt, dass entsprechend der Zeitableitung die Ortsableitungen auch nur in erster Ordnung vorkommen dürfen. Somit liegt der folgende Ansatz nahe:

$$[\gamma^0 \hat{p}_0 - \gamma^1 \hat{p}_1 - \gamma^2 \hat{p}_2 - \gamma^3 \hat{p}_3 - mc] \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.71)$$

bzw. in Kompaktform  $[\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc] \psi(\vec{x}, t) = 0.$

Bei  $\gamma^\mu$  kann es sich nicht um einen reinen Vektor (sog. „Urvektor“) handeln, da sonst die Invarianz des Raumes unter Raumdrehungen gebrochen wäre. Der Ausweg besteht nun darin, die vier Größen  $\gamma^\mu$  als Matrizen aufzufassen. Der Rang und die Algebra dieser Matrizen ist durch weitere Überlegungen festzulegen.

In der Ortsdarstellung bekommt dann Gl. (2.71) die Gestalt

$$[i\hbar \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu - mc \mathbf{1}] \underline{\psi}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.72)$$

wobei

$$\underline{\psi}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Die Notation  $\underline{\psi}$  soll erkennbar machen, dass es sich hierbei nicht um einen Vektor, welcher sich wie der Ortsvektor transformiert, sondern um einen sog. Spinor handelt. Dessen Transformation unter Lorentz-Transformationen ist unterschiedlich zu dem von Vektoren und noch zu bestimmen!!

Beachte die Notation:  $\mu, \nu, \dots$  kennzeichnen Lorentzindices,  $\alpha, \beta, \dots$  Spinorindices.

Die Matrizen  $\hat{\gamma}^\mu$  mit Elementen  $\hat{\gamma}_{\alpha\beta}^\mu$  verknüpfen nun in der Bewegungsgleichung (2.72) die Spinorkomponenten gemäß

$$\sum_{\beta=1}^N [i\hbar \hat{\gamma}_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - mc \delta_{\alpha\beta}] \psi_\beta(\vec{x}, t) = 0. \quad (2.74)$$

Durch Einführung des Feynman–Dagger–Symbols

$$\begin{aligned} \not{\partial} &:= \gamma^\mu \partial_\mu = \frac{\gamma^0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \\ \not{p} &:= \gamma^\mu \hat{p}_\mu = \gamma^0 \hat{p}^0 - \hat{\gamma}^i \hat{p}_i, \end{aligned}$$

lässt sich die Dirac–Gleichung recht kompakt darstellen,

$$\boxed{[\not{p} - mc \mathbf{1}] \underline{\psi}(\vec{x}, t) = 0}, \quad \text{bzw.} \quad \boxed{[i \not{\partial} - mc \mathbf{1}] \underline{\psi}(\vec{x}, t) = 0}. \quad (2.75)$$

Diese Gleichung muss nun noch mit den folgenden Eigenschaften ausgestattet werden:

1. Gleiche Dispersionsrelation wie diejenige der Klein–Gordon–Gleichung
2. Lorentz–Kovarianz

Der Konstruktion entsprechend sollte für die Gleichung (2.75) eine konsistente Wahrscheinlichkeitsinterpretation möglich sein.

**zu 1):** Multiplikation von (2.75) von links mit  $[\hat{p} + mc\mathbb{1}]$  ergibt

$$\underbrace{[\hat{p} + mc\mathbb{1}][\hat{p} - mc\mathbb{1}]}_{= \hat{p}\hat{p} - (mc)^2\mathbb{1}} \underline{\psi}(\vec{r}, t) = 0 . \quad (2.76)$$

Die Dispersionsrelation ist also erfüllt, wenn gilt

$$\hat{p}\hat{p} = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \mathbb{1} , \quad (2.77)$$

oder in expliziter Form

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu \gamma^\nu \hat{p}_\nu = \frac{1}{2} \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{\stackrel{!}{=} 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \mathbb{1} . \quad (2.78)$$

Die Algebra der Matrizen  $\gamma^\mu$  (Dirac–Algebra) ist somit festgelegt durch die Beziehungen

$$\boxed{\boxed{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}}} . \quad (2.79)$$

Im einzelnen folgt hieraus

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0 , \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, 3\} , \quad (2.80)$$

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0 , \quad \text{für} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} , \quad \text{und} \quad i \neq j , \quad (2.81)$$

sowie

$$\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1} , \quad (2.82)$$

$$\gamma^i \gamma^i = -\mathbb{1} , \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, 3\} . \quad (2.83)$$

Die Gleichungen (2.80) und (2.81) besagen, dass alle 4  $\gamma$ -Matrizen miteinander antikommutieren. Durch Multiplikation der Gleichung (2.75) von links mit  $c\gamma^0$  erhalten wir die Hamiltonsche Form

$$c\gamma^0 [i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc\mathbb{1}] \underline{\psi} = 0 \quad \stackrel{!}{\Rightarrow} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} = \hat{H} \underline{\psi} \quad (2.84)$$

mit

$$\hat{H} = \gamma^0 \left[ mc^2\mathbb{1} - i\hbar c \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right] . \quad (2.85)$$

Die Forderung  $\hat{H} \stackrel{!}{=} \hat{H}^\dagger$  führt auf die Hermitizität der  $\gamma^0$ -Matrix:  $\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}$ . Dagegen sind die  $\gamma^i$ -Matrizen ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) antihermitesch, da gilt

$$\left. \begin{aligned} \gamma^0 \gamma^i &\stackrel{!}{=} (\gamma^0 \gamma^i)^\dagger = \gamma^{i\dagger} \gamma^{0\dagger} = \gamma^{i\dagger} \gamma^0 \\ \gamma^0 \gamma^i &\stackrel{(2.80)}{=} -\gamma^i \gamma^0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i. \quad (2.86)$$

Mit diesen abgeleiteten Eigenschaften lassen sich die Komponenten des Hamiltonoperators nun folgendermaßen darstellen

$$\hat{H}_{\alpha\beta} = mc^2 \gamma_{\alpha\beta}^0 - i\hbar c \gamma_{\alpha\delta}^0 \gamma_{\delta\beta}^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.87)$$

*Welchen kleinstmöglichen Rang haben die Matrizen  $\gamma^\mu$ ?*

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir zunächst

$$\text{a) } \text{Tr} \{\gamma^0\} = \text{Tr} \{\mathbf{1}\gamma^0\} = -\text{Tr} \{\gamma^1 \gamma^1 \gamma^0\} = \begin{Bmatrix} -\text{Tr} \{\gamma^1 \gamma^0 \gamma^1\} \\ \text{Tr} \{\gamma^1 \gamma^0 \gamma^1\} \end{Bmatrix} = 0.$$

Ebenso zeigt man dass gilt  $\text{Tr} \{\gamma^1\} = \text{Tr} \{\gamma^2\} = \text{Tr} \{\gamma^3\} = 0$ .

Hierbei wurden zum einen die Antikommutationseigenschaft der  $\gamma$ -Matrizen, und zum anderen die zyklische Vertauschung unter der Spurbildung benutzt.

$$\text{b) } (\gamma^0)^2 = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \text{die Eigenwerte von } \gamma^0 \text{ betragen } \pm 1.$$

$$\text{c) } (\gamma^i)^2 = -\mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \text{die Eigenwerte von } \gamma^i \text{ betragen } \pm i.$$

- Aus den Eigenschaften a) und b) folgt, dass der Rang  $N$  von  $\gamma^0$  **geradzahlig** ist.
- Aus den Eigenschaften a) und c) folgt, dass der Rang der Matrizen  $\gamma^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ebenfalls **geradzahlig** ist.

**Annahme:** Sei  $N = 2$

Es gibt 3 antikommutierende  $2 \times 2$  Matrizen, nämlich die Pauli-Spinmatrizen. Es gilt:

$$\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad (2.88)$$

$$\sigma^1 \sigma^1 = \sigma^2 \sigma^2 = \sigma^3 \sigma^3 = \mathbf{1}. \quad (2.89)$$

Die explizite Darstellung der  $\sigma$ -Matrizen, in welcher  $\sigma^3$  Diagonalform besitzt, lautet

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

**Annahme:** Sei  $N = 4$

In diesem Fall existieren 4 antikommutierende  $4 \times 4$  Matrizen.

Die explizite Darstellung, in welcher  $\gamma^0$  Diagonalform besitzt, lautet

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}^{2 \times 2} & 0^{2 \times 2} \\ 0^{2 \times 2} & -\mathbb{1}^{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0^{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0^{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

**Fazit:**

Darstellungen der antikommutierenden Matrizen  $\gamma^\mu$  mit Eigenschaften  $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$  und  $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) besitzen den Rang  $N = 4$ .

### 2.3.1 Ableitung einer Kontinuitätsgleichung

In Analogie zum Abschnitt 2.2.3 leiten wir nun aus der Dirac-Gleichung eine Kontinuitätsgleichung ab, aus welcher sich die Viererstromdichte des Dirac-Feldes

$$\underline{\psi}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \vdots \\ \psi_4(\vec{x}, t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\psi}^\dagger(\vec{x}, t) = \left( \psi_1^*(\vec{x}, t), \dots, \psi_4^*(\vec{x}, t) \right). \quad (2.92)$$

bestimmen läßt. Ausgehend von Gl. (2.84) mit (2.85) und von der entsprechenden adjungierten Gleichung erhalten wir die Beziehungen

$$\underline{\psi}^\dagger \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi} - \hat{H} \underline{\psi} \right] = 0, \quad (2.93)$$

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi}^\dagger - \left( \hat{H} \underline{\psi}^\dagger \right) \right] \underline{\psi} = 0. \quad (2.94)$$

Bilden wir nun die Differenz (2.93) – (2.94), dann erhalten wir

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\psi}^\dagger \underline{\psi}) + i\hbar c \vec{\nabla} \cdot (\underline{\psi}^\dagger \vec{\gamma} \underline{\psi}) = 0. \quad (2.95)$$

Dieser Ausdruck hat die Form der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (2.96)$$

wobei (nach Abspaltung des Faktors  $i\hbar$ )  $\rho(\vec{x}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  die folgende Form erhalten

$$\rho = \underline{\psi}^\dagger \mathbb{1} \underline{\psi} = \sum_{\alpha=1}^4 \psi_\alpha^* \psi_\alpha \geq 0, \quad (\text{positiv definit!}) \quad (2.97)$$

$$\vec{j} = c \underline{\psi}^\dagger \vec{\gamma} \underline{\psi}. \quad (2.98)$$

Mit der Definition des Dirac-adjungierten Spinors  $\bar{\psi} := \underline{\psi}^\dagger \gamma^0$  lassen sich diese Ausdrücke auf die Form

$$\rho = \bar{\psi} \gamma^0 \underline{\psi} = \bar{\psi}_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^0 \psi_\beta, \quad (2.99)$$

$$j^i = c \bar{\psi} \gamma^i \underline{\psi} = c \bar{\psi}_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^i \psi_\beta, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.100)$$

bringen. Die kovariante Form de Viererstroms  $j^\mu$  lautet somit

$$j^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = c \bar{\psi} \gamma^\mu \underline{\psi}, \quad (2.101)$$

womit die Kontinuitätsgleichung die folgende kompakte Form erhält:

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}. \quad (2.102)$$

Wie von Dirac angestrebt wurde, impliziert die Dirac-Gleichung (2.84) also eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho(\vec{x}, t)$ . Es muss aber noch nachgewiesen werden, dass sich das so definierte  $j^\mu$  unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierervektor transformiert.

## 2.3.2 Nichtrelativistischer Grenzfall

Der nichtrelativistische Limes lässt sich in der Darstellung, in welcher  $\gamma^0$  Diagonalform besitzt (siehe Gl. (2.91)), leicht durchführen.

### 1. Ruhendes Teilchen

En freies Teilchen mit Impuls  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  und kinetischer Energie  $E = \hbar \omega_{\vec{k}}$  wird durch die ebene Welle

$$\underline{\psi}(\vec{x}, t) \propto e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (2.103)$$

beschrieben, wobei  $k^0$  on-shell ist, d.h.  $k^0 = c \omega_{\vec{k}}$ . Wenn das Teilchen ruht, gilt

$$\vec{p} = \vec{k} = \vec{0}, \quad \text{woraus folgt} \quad \underline{\psi}(\vec{x}, t) = \underline{\psi}(t) \propto e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t}. \quad (2.104)$$

Die Dirac-Gleichung reduziert sich also auf die Form

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi}(t) = mc^2 \gamma^0 \underline{\psi}(t), \quad (2.105)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Hieraus ergeben sich die folgenden 4 linear unabhängige Lösungen ( $N = (2\pi)^{-3/2}$ )

$$\psi_{\text{I}} = Ne^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\text{II}} = Ne^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.107)$$

$$\psi_{\text{III}} = Ne^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\text{IV}} = Ne^{i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

- $\psi_{\text{I}}$  und  $\psi_{\text{II}}$  sind die beiden Lösungen zu positiver Energie  $E = +mc^2$ .
- $\psi_{\text{III}}$  und  $\psi_{\text{IV}}$  sind die beiden Lösungen zu negativer Energie  $E = -mc^2$ .

## 2. Dirac–Teilchen im elektromagnetischen Feld

Im Folgenden verwenden wir die Ladung  $e$  als Maß für die Stärke der Ankopplung an das elektromagnetische Feld. Für Elektronen ist die Ladung negativ,  $e = -|e|$ .

Entsprechend der Minimalsubstitutions und dem Korrespondenzprinzip koppelt der kanonische Viererimpuls  $\hat{p}^\mu$  an das elektromagnetische Viererpotential

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}, t) \\ \vec{A}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

gemäss der Substitutionsregel

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c}A^\mu(\vec{x}, t), \quad (2.110)$$

$$\hat{p}_\mu \gamma^\mu \rightarrow \left( \hat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \right) \gamma^\mu = \hat{\not{p}} - \frac{e}{c}\not{A}. \quad (2.111)$$

Die Dirac-Gleichung für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld lautet somit

$$\boxed{\left[ \hat{\not{p}} - \frac{e}{c}\not{A} - mc\mathbb{1} \right] \underline{\psi}(\vec{x}, t) = 0}. \quad (2.112)$$

## 3. Zerlegung in Gleichungen für Zweierspinoren

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\Phi}} \\ \underline{\tilde{\chi}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\tilde{\Phi}} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{\chi}} = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

Ist nun die Darstellung der  $\gamma$ -Matrizen wie in Gl. (2.91) gewählt, d.h.  $\gamma^0$  in Diagonalform, dann folgt aus (2.112) für die Zweierspinoren  $\underline{\tilde{\Phi}}$  und  $\underline{\tilde{\chi}}$  das gekoppelte Gleichungssystem

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\tilde{\Phi}} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \underline{\tilde{\chi}} + (e\varphi + mc^2) \underline{\tilde{\Phi}}, \quad (2.114)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\tilde{\chi}} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \underline{\tilde{\Phi}} + (e\varphi - mc^2) \underline{\tilde{\chi}}. \quad (2.115)$$

Hierbei sind die Komponenten des Pauli-Vektors  $\vec{\sigma}$  die Pauli-Matrizen  $\sigma^1$ ,  $\sigma^2$  und  $\sigma^3$ .

**Beachte:** Die DGLn. sind von 1. Ordnung und koppeln die Zweierspinoren miteinander, während die Pauli-Matrizen nur die Komponenten der Zweierspinoren mischen.

Im nächsten Schritt verschieben wir nun die Energieskala um die Ruhenergie  $mc^2$  indem wir den entsprechenden Phasenfaktor  $e^{-imc^2t/\hbar}$  abspalten,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.116)$$

$$\Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \left\{ \frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} + i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.117)$$

Das gekoppelte Gleichungssystem für die Zweierspinoren  $\underline{\Phi}$  und  $\underline{\chi}$  lautet nun

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \underline{\chi} + e\varphi \underline{\Phi}, \quad (2.118)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\chi} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \underline{\Phi} + (e\varphi - 2mc^2) \underline{\chi}. \quad (2.119)$$

**Beachte:** Bis hierher haben wir noch keine Näherungen eingeführt!

Im nichtrelativistischen Limes gelten die Energieabschätzungen (d.h. man klammert beim singulären Coulomb-Potentialen ein vom klassischen Elektronenradius  $r = Z\frac{e^2}{mc^2} = Z\alpha\lambda_c$  gebildetes Volumen um die Singularität aus)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \ll mc^2 \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.120)$$

$$|e\varphi(\vec{r}, t)| \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix} \ll mc^2 \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

Hiermit ergibt sich nun näherungsweise aus Gl. (2.119)

$$\underline{\chi} = \underbrace{\frac{\vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)}{2mc}}_{\mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right)} \underline{\Phi}. \quad (2.122)$$

- **Zwischenfazit:** Im nichtrelativistischen Limes repräsentiert der Zweierspinor  $\underline{\Phi}$  die großen und der Zweierspinor  $\underline{\chi}$  die kleinen Komponenten des Viererspinors  $\underline{\psi}$ .

Gl. (2.122) in (2.118) eingesetzt ergibt nun eine Gleichung für den Zweierspinor  $\underline{\Phi}$  allein,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi} = \frac{\left[ \vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2}{2m} \underline{\Phi} + e\varphi \underline{\Phi}. \quad (2.123)$$

Als nächstes verwenden wir eine nützliche Identität der Pauli–Matrizen:  
Seien  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  zwei beliebige Vektoren mit Komponenten  $a_i$  und  $b_i$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\sigma^i a^i \sigma^j b^j &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i}_{= 2\delta^{ij}} + \underbrace{\sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i}_{= 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k} \right) a^i b^j \\ &= (\delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k) a^i b^j ,\end{aligned}\tag{2.124}$$

$$\implies (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\tag{2.125}$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left[ \vec{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right]^2 &= \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left[ \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) \right] \\ &= \left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \mathbb{1} - \frac{e\hbar}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} ,\end{aligned}\tag{2.126}$$

wobei  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$  verwendet wurde. Somit erhält (2.123) die Form

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{x}, t) = \left( \frac{\left( \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) + e\varphi(\vec{x}, t) \right) \Phi(\vec{x}, t)} .\tag{2.127}$$

Dies ist die wohlbekannte **Pauli–Gleichung**. Sie beschreibt ein nichtrelativistisches Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  und magnetischem Moment  $\mu = \mu_B$  in einem elektromagnetischen Feld, wobei  $\mu_B = |e|\hbar/(2mc)$  das Bohrsche Magneton ist.

### 2.3.3 Kovarianz der Dirac–Gleichung unter Lorentz–Transformation

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{Hintransformation} \quad S \rightarrow S' \tag{2.128}$$

$$x^{\mu} = (a^{-1})^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} \quad \text{Rücktransformation} \quad S' \rightarrow S \tag{2.129}$$

#### Forderung der Lorentz-Kovarianz:

Die Dirac-Gleichung soll in  $S$  und in  $S'$  dieselbe Form besitzen, d.h. es soll gelten

$$[i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc\mathbb{1}] \underline{\psi}(\vec{x}, t) = 0 ,\tag{2.130}$$

$$[i\hbar\gamma'^{\mu}\partial'_{\mu} - mc\mathbb{1}] \underline{\psi}'(\vec{x}', t') = 0 ,\tag{2.131}$$

wobei die Algebra der  $\gamma$ -Matrizen in beiden Koordinatensystemen übereinstimmen soll,

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} ,\tag{2.132}$$

$$\gamma'^{\mu}\gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu}\gamma'^{\mu} = 2g^{\mu\nu} .\tag{2.133}$$

**Ansatz:** Die Lorentz–Transformation mische die Spinorkomponenten linear

$$\underline{\psi}'(\vec{x}') = S(a) \underline{\psi}(\vec{x}) , \quad (2.134)$$

$$\psi'_\alpha(\vec{x}') = S_{\alpha\beta}(a) \psi_\beta(\vec{x}) . \quad (2.135)$$

Gruppeneigenschaft sukzessiver Lorentz–Transformationen:

$$S \xrightarrow{a_1} S' \xrightarrow{a_2} S'' , \quad (2.136)$$

$$\underline{\psi}''(\vec{x}'') = S(a_2) \underline{\psi}'(\vec{x}') = S(a_2)S(a_1) \underline{\psi}(\vec{x}) \stackrel{!}{=} S(a_2 a_1) \underline{\psi}(\vec{x}) . \quad (2.137)$$

Hieraus folgt

$$\boxed{S(a_2 a_1) = S(a_2)S(a_1)} . \quad (2.138)$$

Es ist unmittelbar einsichtig, dass ebenso die inverse Transformation existiert muss,

$$\underline{\psi}(\vec{x}) = S^{-1}(a) \underline{\psi}'(\vec{x}') = S(a^{-1}) \underline{\psi}'(\vec{x}') , \quad (2.139)$$

$$\implies \boxed{S^{-1}(a) = S(a^{-1})} . \quad (2.140)$$

Multipliziert man nun (2.130) von links mit  $S(a)$  und fügt zwischen Operator und Wellenfunktion die Identität in der Form  $\mathbb{1} = S^{-1}(a)S(a)$  ein, dann erhält man

$$[\mathbf{i}\hbar S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)\partial_\mu - mc\mathbb{1}] \underbrace{S(a)\underline{\psi}(\vec{x})}_{\underline{\psi}'(\vec{x}')} = 0 , \quad (2.141)$$

mit

$$\partial_\mu = \partial'_\nu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \partial'_\nu a^\nu{}_\mu , \quad \text{da gilt} \quad x'^\nu = a^\nu{}_\mu x^\mu . \quad (2.142)$$

Somit ergibt sich

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)\partial_\mu = \underbrace{S(a)a^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(a)}_{\stackrel{!}{=} \gamma'^\nu} \partial'_\nu . \quad (2.143)$$

Falls

$$S(a)a^\nu{}_\mu \gamma^\mu S^{-1}(a) = \gamma'^\nu , \quad (2.144)$$

dann geht (2.141) in (2.131) über. Durch einfache Umformung von (2.144) ergibt sich als **Bestimmungsgleichung für  $S(\mathbf{a})$**

$$S^{-1}(a)\gamma'^\nu S(a) = a^\nu{}_\mu \gamma^\mu . \quad (2.145)$$

**Beachte:** Diese Beziehung folgt aus der Forderung der Kovarianz der Dirac-Gleichung unter homogenen Lorentz-Transformationen.

**Explizite Ausdrücke für  $S(\mathbf{a})$ :**

**1. Räumliche Drehung um die  $z$ -Achse mit Winkel  $\varphi$ :**

$$x'^{\nu} = a^{\nu}_{\mu} x^{\mu} \quad \text{mit} \quad a^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.146)$$

Behauptung: die Transformationsmatrix  $S_{R,3}$  zur Lorentz-Transformation (2.146) hat die Form

$$S_{R,3} = e^{-\frac{1}{2}\varphi\gamma^1\gamma^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{2^n} \varphi^n (\gamma^1\gamma^2)^n. \quad (2.147)$$

Zum Beweis verwendet man die algebraischen Eigenschaften von  $\gamma^{\mu}$ . Man erhält

$$\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = -\underbrace{\gamma^1\gamma^1}_{=-\mathbb{1}} \underbrace{\gamma^2\gamma^2}_{=-\mathbb{1}} = -\mathbb{1}, \quad (2.148)$$

und desweiteren

$$(\gamma^1\gamma^2)^3 = -\gamma^1\gamma^2, \quad (2.149)$$

$$(\gamma^1\gamma^2)^4 = \mathbb{1}. \quad (2.150)$$

Der Ausdruck (2.147) erhält somit nach Aufsummation die Gestalt

$$S_{R,3} = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbb{1} - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \gamma^1\gamma^2. \quad (2.151)$$

Verifizierung der bestimmenden Gleichung (2.145) für  $\nu = 1$ :

$$\begin{aligned} S_{R,3}^{-1}(a)\gamma^1 S_{R,3}(a) &= \left[ \cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \gamma^1\gamma^2 \right] \gamma^1 \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \gamma^1\gamma^2 \right] \\ &= \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \gamma^1\gamma^2 \right] \gamma^1 \left[ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \gamma^1\gamma^2 \right] \\ &= \left[ \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \gamma^1 + 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \gamma^2 \\ &= \cos(\varphi) \gamma^1 + \sin(\varphi) \gamma^2 = a^1_{\mu} \gamma^{\mu}. \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

lässt sich  $\gamma^1\gamma^2$  schreiben als (vgl. Gl. (2.91))

$$\gamma^1\gamma^2 = -i\Sigma^3. \quad (2.153)$$

Somit erhalten wir (siehe (2.134) und (2.147))

$$\boxed{\underline{\psi}'(\vec{x}') = e^{\frac{i}{2}\varphi\Sigma^3}\underline{\psi}(\vec{x})}, \quad (2.154)$$

und bei Drehung um beliebige Achse  $\vec{\varphi}$

$$\boxed{\underline{\psi}'(\vec{x}') = e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\Sigma}}\underline{\psi}(\vec{x})}. \quad (2.155)$$

Der resultierende Ausdruck ist als völlig analog zur Drehung von Pauli-Spinoren  $\underline{\Phi}$ ,

$$\underline{\Phi}'(\vec{x}') = e^{\frac{i}{2}\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}}\underline{\Phi}(\vec{x}). \quad (2.156)$$

Für  $\varphi = 2\pi$  ergibt Gleichung (2.151)  $S_R = -\mathbb{1}$  und führt somit auf

$$\underline{\psi}'(\vec{x}') = -\underline{\psi}(\vec{x}). \quad (2.157)$$

Bei einer Drehung um den Winkel  $2\pi$  geht also ein Spinor in sein Negatives über. Erst bei einer Drehung um den Winkel  $4\pi$  geht ein Spinor in sich selbst über.

## 2. Lorentz-Boost in $x^1$ -Richtung:

Zur Unterscheidung von den später eingeführten Spinoren  $\underline{u}$  und  $\underline{v}$  wählen wir als Boost-Parameter die Geschwindigkeit  $w$  bzw. den „imaginären“ Winkel  $z$ ,

$$\begin{aligned} \tanh z &= \beta = \frac{w}{c}, \\ \cosh z &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \sinh z &= \gamma\beta. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Damit ergibt sich für einen Boost in  $x$ -Richtung

$$a^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh z & -\sinh z & 0 & 0 \\ -\sinh z & \cosh z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.159)$$

In formaler Analogie zum Ausdruck (2.151) lautet die Transformationsmatrix für einen Boost in  $x$ -Richtung

$$S_{L,1}(a) = e^{-\frac{z}{2}\gamma^0\gamma^1} = \cosh\left(\frac{z}{2}\right)\mathbb{1} - \sinh\left(\frac{z}{2}\right)\gamma^0\gamma^1, \quad (2.160)$$

was, vorstehender Vorgehensweise folgend, leicht zu verifizieren ist.

Es gelten die allgemeinen Eigenschaften

$$\text{Drehung} \quad S_{\text{R}}^{\dagger} = S_{\text{R}}^{-1} \quad S_{\text{R}} \text{ unitär} \quad (2.161)$$

$$\text{Lorentz-Boost} \quad S_{\text{L}}^{\dagger} = S_{\text{L}} \neq S_{\text{L}}^{-1} \quad S_{\text{L}} \text{ hermitesch} \quad (2.162)$$

Sowohl für  $S_{\text{L}}$  als auch für  $S_{\text{R}}$  gilt jedoch

$$S^{-1} = \gamma^0 S^{\dagger} \gamma^0. \quad (2.163)$$

Betrachte nun den Dirac-adjungierten Spinor  $\bar{\psi} := \underline{\psi}^{\dagger} \gamma^0$ .  
Dieser besitzt das Transformationsverhalten

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \underline{\psi}'^{\dagger} \gamma^0 = \underline{\psi}^{\dagger} S^{\dagger}(a) \gamma^0. \quad (2.164)$$

Mit Gl. (2.163) folgt

$$\underline{\psi}^{\dagger} S^{\dagger}(a) \gamma^0 = \underline{\psi}^{\dagger} \gamma^0 S^{-1}(a) \gamma^0 \gamma^0 = \bar{\psi} S^{-1}(a). \quad (2.165)$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}' \underline{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}(a) S(a) \underline{\psi} = \bar{\psi} \underline{\psi} \quad (2.166)$$

Somit ist  $\bar{\psi} \underline{\psi}$  ein Lorentzskalar. Bereits bekannt sind die Relationen

$$j^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \underline{\psi} \quad \text{und} \quad \partial_{\mu} j^{\mu} = 0. \quad (2.167)$$

Die folgende kurze Rechnung

$$j'^{\mu} = \bar{\psi}'(x') \gamma^{\mu} \underline{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \underbrace{S^{-1}(a) \gamma^{\mu} S(a)}_{a^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}} \underline{\psi}(x) \quad (2.168)$$

$$= a^{\mu}_{\nu} \bar{\psi}(x) \gamma^{\nu} \underline{\psi}(x) \quad (2.169)$$

zeigt, dass  $j^{\mu}$  sich tatsächlich wie ein Vierervektor transformiert.

### 3. Raumspiegelung

Die Raumspiegelung ist eine **uneigentliche Lorentz-Transformation**, da sie sich **nicht** durch infinitesimale Rotationen aus der Identität erzeugen läßt.

Die zur Raumspiegelung

$$\vec{x}' = -\vec{x}, \quad t' = t$$

gehörige Lorentz-Transformationsmatrix ist

$$a^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.170)$$

Nennen wir den Operator der Spinortransformationen für Raumspiegelungen Paritätsoperator  $P$ , d.h.  $S(a) \rightarrow P$ , dann lautet die Bestimmungsgleichung (2.145)

$$P^{-1}\gamma'^{\nu}P = a^{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}, \quad \text{d.h.} \quad P^{-1}\gamma^0P = \gamma^0, \quad P^{-1}\gamma^iP = -\gamma^i.$$

Hieraus folgt

$$P = e^{i\varphi}\gamma^0, \quad P^{-1} = P^{\dagger} = e^{-i\varphi}\gamma^0 \quad \text{unitär!} \quad (2.171)$$

In Analogie zu den eigentlichen Lorentz-Transformationen sollen *vier Spiegelungen den Spinor in sich selbst überführen*, d.h.  $e^{i4\varphi} = 1$ , woraus folgt

$$e^{i\varphi} = \pm 1, \pm i.$$

Aus Gl.(2.171) folgt, dass die Zweierspinoren  $\underline{\Phi}$  und  $\underline{\chi}$  bei einer Raumspiegelung unterschiedlich transformieren,

$$P\underline{\Phi} = e^{i\varphi}\underline{\Phi}, \quad P\underline{\chi} = -e^{i\varphi}\underline{\chi}.$$

### 2.3.4 Bilineare Kovariante der Dirac-Theorie

- Die  $\gamma$ -Matrizen erzeugen eine sog. Clifford Algebra.
- Irreduzible Darstellungen dieser Algebra sind  $4 \times 4$ -Matrizen.
- Die Elemente des Vektorraums, auf welche die Matrizen wirken heißen **Spinoren**.

Mit der Identität  $\mathbf{1}$  und den 4 Matrizen  $\gamma^{\mu}$  lassen sich insgesamt 16 linear unabhängige  $4 \times 4$ -Matrizen bilden

$$\Gamma_i \quad (i = 1, \dots, 16)$$

Zur genaueren Betrachtung führen wir nun zunächst die sog.  $\gamma^5$ -Matrix ein,

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Wählen wir die Darstellung, in welcher  $\gamma^0$  Diagonalform besitzt, Eq. (2.91), dann erhält die  $\gamma^5$ -Matrix die Gestalt

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $\gamma^5$  besitzt die Eigenschaften

$$\gamma^{5\dagger} = -\gamma^5, \quad \{\gamma^5, \gamma^{\mu}\} = 0, \quad \text{und} \quad \gamma^5\gamma^5 = \mathbf{1}.$$

Die linear unabhängigen Matrizen  $\Gamma_i$  ( $i = 1 \dots, 16$ ) sind im einzelnen

$$\begin{aligned} \{\Gamma_1\} &\rightarrow \Gamma_S = \mathbf{1}, && 1 \text{ Matrix} \\ \{\Gamma_2, \dots, \Gamma_5\} &\rightarrow \Gamma_V^{\mu} = \gamma^{\mu}, && 4 \text{ Matrizen} \\ \{\Gamma_6, \dots, \Gamma_{11}\} &\rightarrow \Gamma_T^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} = i\frac{1}{2}[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}], && 6 \text{ Matrizen} \\ \{\Gamma_{12}\} &\rightarrow \Gamma_P = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 =: \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, && 1 \text{ Matrix} \\ \{\Gamma_{13}, \dots, \Gamma_{16}\} &\rightarrow \Gamma_A^{\mu} = \gamma^5\gamma^{\mu}, && 4 \text{ Matrizen} \end{aligned} \quad (2.172)$$

Die Matrizen  $\Gamma^i$  ( $i = 1, \dots, 16$ ) besitzen die Eigenschaften

1.  $(\Gamma_i)^2 = \mathbb{1}$ .
2. Für jedes  $\Gamma_i$  ( $\Gamma_i \neq \Gamma_S = \mathbb{1}$ ) existiert ein  $\Gamma_j$  derart dass  $\Gamma_i \Gamma_j = -\Gamma_j \Gamma_i$ .
3. Somit verschwindet für jedes  $\Gamma_i$ , ausgenommen  $\Gamma_S$ , die Spur,

$$\text{tr } \Gamma_i (\Gamma_j)^2 = -\text{tr } \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = -\text{tr } (\Gamma_j)^2 \Gamma_i \quad \Longrightarrow \quad \text{tr } \Gamma_i = 0.$$

4. Für jedes Paar  $(\Gamma_i, \Gamma_j)$  ( $i \neq j$ ) existiert ein  $\Gamma_k \neq \Gamma_S$  derart dass  $\Gamma_i \Gamma_j = a \Gamma_k$ , wobei  $a = \pm 1$  oder  $\pm i$ .
5. Beweis der linearen Unabhängigkeit:

Sei

$$\sum_{j=1}^{16} \lambda_j \Gamma_j = 0.$$

Sukzessive Multiplikation mit allen  $\Gamma_i$  und anschließende Spurbildung ergibt  $\lambda_i = 0$  für alle  $i$ .

Mit den  $\Gamma_i$  lassen sich nun 16 Bilinearformen (“Erwartungswerte“ im Spinorraum) bilden,

$$\bar{\psi} \Gamma_i \underline{\psi}, \quad i = 1, \dots, 16. \quad (2.173)$$

Entsprechend dem Transformationsverhalten der Bilinearformen (2.173) können die 16 Matrizen  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{16}$  wie folgt eingeordnet werden:

Skalar	$\mathbb{1}$	
Pseudoskalar	$\gamma^5$	
polarer Vektor	$\gamma^\mu$	(2.174)
axialer Vektor (Pseudovektor)	$\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu$	
schiefsymmetrischer Tensor	$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$	

- Pseudo-Skalare und Pseudo-Vektoren transformieren sich bei eigentlichen Lorentz-Transformationen wie Skalare und Vektoren. Bei uneigentlichen Lorentz-Transformationen (Raum- und Zeitspiegelungen), für welche  $\det(a) = -1$  ist, ändern sie ihr Vorzeichen.

Wir ordnen nun die bilinearen Kovarianten nach ihrem Verhalten unter eigentlichen bzw. unter uneigentlichen Lorentz-Transformationen,  $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$ :

1. Skalare Dichte:

$$\begin{aligned} \rho_S(x) &= \bar{\psi}(x) \mathbb{1} \underline{\psi}(x) = \underline{\psi}^\dagger \gamma_0 \underline{\psi} \\ \rho'_S(x') &\stackrel{!}{=} \rho_S(x) \\ \bar{\psi}'(x') \underline{\psi}'(x') &= \bar{\psi}(x) \underbrace{S^{-1}(a) S(a)}_{= \mathbb{1}} \underline{\psi}(x) = \bar{\psi}(x) \underline{\psi}(x) \end{aligned} \quad (2.175)$$

2. Pseudoskalare Dichte:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{P}}(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma^5\underline{\psi}(x) \\ \rho'_{\text{P}}(x') &= \bar{\psi}'(x')\gamma^5\underline{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\underbrace{S^{-1}(a)\gamma^5S(a)}_{=\det(a)\gamma^5}\underline{\psi}(x) = \det(a)\bar{\psi}(x)\gamma^5\underline{\psi}(x) \\ &= \det(a)\rho_{\text{P}}(x)\end{aligned}\quad (2.176)$$

3. Stromdichte:

$$\begin{aligned}j^\mu(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\underline{\psi}(x) \\ j'^\mu(x') &= \bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\underline{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(a)\gamma^\mu S(a)\underline{\psi}(x) = a^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\underline{\psi}(x) \\ &= a^\mu{}_\nu j^\nu(x)\end{aligned}\quad (2.177)$$

4. Axialstromdichte:

$$\begin{aligned}j_{\text{A}}^\mu(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\underline{\psi}(x) \\ j_{\text{A}}'^\mu(x') &= \bar{\psi}'(x')\gamma^5\gamma^\mu\underline{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(a)\gamma^5\gamma^\mu S(a)\underline{\psi}(x) \\ &= \det(a)a^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\nu\underline{\psi}(x) = \det(a)a^\mu{}_\nu j_{\text{A}}^\nu(x)\end{aligned}\quad (2.178)$$

5. Antisymmetrische Tensordichte:

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\underline{\psi}'(x') = a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\kappa \bar{\psi}(x)\sigma^{\rho\kappa}\underline{\psi}(x)\quad (2.179)$$

## 2.4 Lösung der Dirac–Gleichung für freie Teilchen

Wir zerlegen die Spinorwellenfunktion in die Anteile positiver und negativer Energie,

$$\underline{\psi}(x) = \underline{\psi}^{(+)}(x) + \underline{\psi}^{(-)}(x).\quad (2.180)$$

On-shell Zustände mit scharfem Impuls  $\hbar\vec{k}$  und scharfer Spin-Polarisation  $s = \pm 1$  haben die Form

$$\underline{\psi}^{(+)}(x) \propto \underline{u}(\vec{k}, s) e^{-ik^\mu x_\mu} \quad \text{und} \quad \underline{\psi}^{(-)}(x) \propto \underline{v}(\vec{k}, s) e^{ik^\mu x_\mu}\quad (2.181)$$

wobei

$$k^\mu x_\mu = \omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad \omega_{\vec{k}} = c\sqrt{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 + \vec{k}^2}.\quad (2.182)$$

Hierbei ist

$$\underline{u}(\vec{k}, s) \quad \text{der Dirac–Spinor zum Zustand positiver Energie,}\quad (2.183)$$

und

$$\underline{v}(\vec{k}, s) \quad \text{der Dirac-Spinor zum Zustand negativer Energie.} \quad (2.184)$$

Der Parameter  $s$  kennzeichnet den Spin und nimmt in den üblichen Notationen die „Werte“  $(1, 2)$  bzw.  $(\uparrow, \downarrow)$  bzw.  $(+, -)$  an. Setzt man den Lösungsansatz (2.180) in die Dirac Gleichung für das freie Teilchen ein, erhält man

$$\text{für } \underline{\psi}^{(+)} : \quad \left( \gamma^\mu k_\mu - \frac{mc}{\hbar} \mathbb{1} \right) \underline{u}(\vec{k}, s) = 0, \quad (2.185)$$

und

$$\text{für } \underline{\psi}^{(-)} : \quad \left( \gamma^\mu k_\mu + \frac{mc}{\hbar} \mathbb{1} \right) \underline{v}(\vec{k}, s) = 0. \quad (2.186)$$

Dies sind lineare homogene algebraische Gleichungen für die Spinoren  $\underline{u}(\vec{k}, s)$  und  $\underline{v}(\vec{k}, s)$ . Es ist vorteilhaft, die Spinoren zunächst im Ruhssystem des Teilchens zu bestimmen, da hier der Vierervektor  $k^\mu$  die einfache Form

$$k^\mu = \begin{pmatrix} mc/\hbar \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (2.187)$$

besitzt, und somit gilt

$$(\gamma^0 - \mathbb{1}) \underline{u}(\vec{0}, s) = 0, \quad (\gamma^0 + \mathbb{1}) \underline{v}(\vec{0}, s) = 0. \quad (2.188)$$

Da  $\gamma^0$  mit  $\Sigma^i$  kommutiert,  $[\gamma^0, \Sigma^i] = 0$ , existiert eine gemeinsame Eigenbasis von  $\gamma^0$  und z.B.  $\Sigma^3$ . In der Eigenbasis besitzt  $\Sigma^3$  die Diagonalform

$$\Sigma^3 = i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.189)$$

Die Eigenwertgleichungen für die Spinoren haben somit die einfache Form

$$\Sigma^3 \underline{u}(0, \pm) = \pm \underline{u}(0, \pm), \quad \Sigma^3 \underline{v}(0, \mp) = \pm \underline{v}(0, \mp). \quad (2.190)$$

Daraus folgt

$$\underline{u}(0, +) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{u}(0, -) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}(0, -) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}(0, +) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.191)$$

Die Spinoren  $\{\underline{u}(0, +), \underline{u}(0, -), \underline{v}(0, -), \underline{v}(0, +)\}$  bilden eine vollständige Orthonormalbasis im Spinorraum.

Wir “katapultieren“ nun diese Lösungen mittels eines Lorentz–Boosts in ein Inertialsystem, in welchem das Teilchen die Geschwindigkeit  $\vec{w} = c\vec{k}/k^0$  besitzt,

$$\underline{u}(\vec{k}, \pm) = S_L(-\vec{w}) \underline{u}(0, \pm) , \quad (2.192)$$

$$\underline{v}(\vec{k}, \pm) = S_L(-\vec{w}) \underline{v}(0, \pm) . \quad (2.193)$$

In Verallgemeinerung von Gl. (2.160) gilt mit  $\tanh(z) = |\vec{w}|/c$

$$S_L(-\vec{w}) = \cosh\left(\frac{z}{2}\right) \left[ \mathbb{1} + \gamma^0 \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \right] . \quad (2.194)$$

Ferner folgt aus (2.158)

$$\cosh\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{\frac{mc^2 + E}{2mc^2}} , \quad \vec{p} = \frac{m\vec{w}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} , \quad (2.195)$$

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{|\vec{p}|c}{mc^2 + E} , \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} . \quad (2.196)$$

Unter Verwendung der Ausdrücke  $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$  erhält die Boost–Matrix  $S_L$  die Form

$$S_L = \sqrt{\frac{mc^2 + E}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z c}{mc^2 + E} & \frac{p_- c}{mc^2 + E} \\ 0 & 1 & \frac{p_+ c}{mc^2 + E} & -\frac{p_z c}{mc^2 + E} \\ \frac{p_z c}{mc^2 + E} & \frac{p_- c}{mc^2 + E} & 1 & 0 \\ \frac{p_+ c}{mc^2 + E} & -\frac{p_z c}{mc^2 + E} & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.197)$$

$$\underline{u}(\vec{k}, +) \quad \underline{u}(\vec{k}, -) \quad \underline{v}(\vec{k}, -) \quad \underline{v}(\vec{k}, +)$$

Die Spalten der Boost-Matrix  $S_L$  geben also unmittelbar die gesuchten Spinoren, nämlich

$$\underline{u}(\vec{k}, +) = \sqrt{\frac{mc^2 + E}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z c}{mc^2 + E} \\ \frac{p_+ c}{mc^2 + E} \end{pmatrix} , \quad \underline{u}(\vec{k}, -) = \sqrt{\frac{mc^2 + E}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_- c}{mc^2 + E} \\ -\frac{p_z c}{mc^2 + E} \end{pmatrix} , \quad (2.198)$$

$$\underline{v}(\vec{k}, -) = \sqrt{\frac{mc^2 + E}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_z c}{mc^2 + E} \\ \frac{p_+ c}{mc^2 + E} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{v}(\vec{k}, +) = \sqrt{\frac{mc^2 + E}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_- c}{mc^2 + E} \\ -\frac{p_z c}{mc^2 + E} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.199)$$

Die entsprechenden Dirac-adjungierten Spinoren haben die Form

$$\bar{u}(\vec{k}, s) = \underline{u}^\dagger(\vec{k}, s)\gamma^0, \quad \bar{v}(\vec{k}, s) = \underline{v}^\dagger(\vec{k}, s)\gamma^0, \quad (2.200)$$

und erfüllen wegen  $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$  die Gleichungen

$$\bar{u}\left(\vec{k} - \frac{mc}{\hbar}\mathbf{1}\right) = 0, \quad \bar{v}\left(\vec{k} + \frac{mc}{\hbar}\mathbf{1}\right) = 0. \quad (2.201)$$

Die Orthonormierungsbeziehungen der  $u$ - und  $v$ -Spinoren lauten

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{k}, s) \underline{u}(\vec{k}, s') &= \delta_{ss'}, & \bar{u}(\vec{k}, s) \underline{v}(\vec{k}, s') &= 0, \\ \bar{v}(\vec{k}, s) \underline{v}(\vec{k}, s') &= -\delta_{ss'}, & \bar{v}(\vec{k}, s) \underline{u}(\vec{k}, s') &= 0, \end{aligned} \quad (2.202)$$

und die Vollständigkeitsrelation hat die Form

$$\begin{aligned} &\sum_s \left[ \underline{u}(\vec{k}, s) \otimes \bar{u}(\vec{k}, s) - \underline{v}(\vec{k}, s) \otimes \bar{v}(\vec{k}, s) \right] \\ &= S_L(-\vec{w}) \sum_s \left[ \underbrace{\underline{u}(\vec{0}, s) \otimes \bar{u}(\vec{0}, s) - \underline{v}(\vec{0}, s) \otimes \bar{v}(\vec{0}, s)}_{= \mathbf{1}} \right] S_L^{-1}(-\vec{w}) = \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Als nächstes teilen wir den Spinorraum in die Unterräume der Zustände positiver und negativer Energie auf. Wir schreiben

$$\mathbf{1} = \Lambda_+(\vec{k}) + \Lambda_-(\vec{k}), \quad (2.204)$$

wobei

$$\Lambda_+(\vec{k}) = \sum_s \underline{u}(\vec{k}, s) \otimes \bar{u}(\vec{k}, s) \quad (2.205)$$

$$\Lambda_-(\vec{k}) = -\sum_s \underline{v}(\vec{k}, s) \otimes \bar{v}(\vec{k}, s) \quad (2.206)$$

die Projektionsoperatoren auf die entsprechenden Unterräume mit den Eigenschaften

$$\Lambda_\pm(\vec{k}) \Lambda_\pm(\vec{k}) = \Lambda_\pm(\vec{k})$$

$$\Lambda_\pm(\vec{k}) \Lambda_\mp(\vec{k}) = 0$$

sind. Die Projektionsoperatoren wirken wie folgt:

$$\Lambda_+(\vec{k}) \underline{u}(\vec{k}, s) = \underline{u}(\vec{k}, s), \quad \Lambda_-(\vec{k}) \underline{v}(\vec{k}, s) = \underline{v}(\vec{k}, s) \quad (2.207)$$

$$\Lambda_+(\vec{k}) \underline{v}(\vec{k}, s) = 0, \quad \Lambda_-(\vec{k}) \underline{u}(\vec{k}, s) = 0. \quad (2.208)$$

Diese Relationen verdeutlichen nochmals die Orthogonalität der Unterräume der Zustände positiver und negativer Energie.

Durch direkte Berechnung mit Hilfe von (2.198) und (2.199) erhalten wir (s. a. (2.177))

$$\bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^\mu \underline{u}(\vec{k}, s') = \delta_{ss'} \frac{p^\mu}{mc}, \quad \bar{v}(\vec{k}, s) \gamma^\mu \underline{v}(\vec{k}, s') = \delta_{ss'} \frac{p^\mu}{mc}. \quad (2.209)$$

## 2.4.1 Wellenpakete

Das Diracsche Wellenpaket hat die allgemeine Form

$$\underline{\psi}(\vec{x}, t) = \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left[ b(\vec{k}, s) \underline{u}(\vec{k}, s) e^{-ik_\mu x^\mu} + d^*(\vec{k}, s) \underline{v}(\vec{k}, s) e^{ik_\mu x^\mu} \right].$$

Der Normierungsfaktor  $\sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega_{\vec{k}}}}$  wurde derart gewählt, um später eine unmittelbar einsichtige Interpretation der Entwicklungskoeffizienten  $b(\vec{k}, s)$  und  $d^*(\vec{k}, s)$  zu ermöglichen.

Das Normierungsintegral erhält hiermit die Form

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}, t) &= q \int d^3\vec{x} \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^0 \underline{\psi}(\vec{x}, t) \\ &= q \sum_s \int d^3\vec{k} \left[ b^*(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) + d(\vec{k}, s) d^*(\vec{k}, s) \right], \end{aligned} \quad (2.210)$$

und der Erwartungswert der Energie lautet

$$\langle \bar{\psi} | \hat{H} | \underline{\psi} \rangle = \sum_s \int d^3\vec{k} \hbar\omega_{\vec{k}} \left[ b^*(\vec{k}, s) b(\vec{k}, s) - d(\vec{k}, s) d^*(\vec{k}, s) \right]. \quad (2.211)$$

Als nächstes betrachten wir nun ein Gaußsches Wellenpaket für ein ruhenden Teilchen positiver Energie und räumlicher Ausdehnung  $a$ ,

$$\underline{\psi}(\vec{x}, t=0) = \left( \frac{1}{2\pi a^3} \right)^{3/4} e^{-\vec{x}^2/a^2} \underline{u}(0, +). \quad (2.212)$$

Fourier–Transformation und Orthogonalität der Spinoren ergibt

$$b(\vec{k}, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left( \frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/4} e^{-\vec{k}^2 a^2/2} \bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 \underline{u}(0, +), \quad (2.213)$$

$$d^*(-\vec{k}, s) = \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega_{\vec{k}}}} \left( \frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/4} e^{-\vec{k}^2 a^2/2} \bar{v}(-\vec{k}, s) \gamma^0 \underline{u}(0, +). \quad (2.214)$$

Somit erhält  $d^*(-\vec{k}, s)$  ein wesentliches Gewicht nur dann wenn die beiden Bedingungen

1.  $\bar{v}(-\vec{k}, s) \gamma^0 \underline{u}(0, +) \approx 1, \quad \rightarrow \quad \left| \vec{k} \right| \gtrsim \frac{mc}{\hbar}$
2.  $k \lesssim \frac{1}{a}$

simultan erfüllt sind. Dies bedeutet, dass das Wellenpaket eines ruhenden Elektrons auf der Skala der Comptonwellenlänge

$$a \lesssim \frac{\hbar}{mc},$$

lokalisiert sein muß.

# 3 Quantisierung der freien Felder

## 3.1 Kanonische Quantisierung

### 1. Kanonische Quantisierung eines klassischen konservativen Systems

- $q_i$  generalisierte Koordinaten
- Lagrange Funktion  $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t)$
- Hamiltonsches Prinzip

$$\delta S = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, f.$$

Definition des kanonisch konjugierten Impulses:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ .

Mittels einer Legendre Transformation gehen wir nun von der Lagrange Funktion zur Hamilton Funktion über:

$$H(\{p_i\}, \{q_i\}) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L.$$

#### Quantisierung:

Wir ordnen den Observablen  $q_i$  und  $p_i$  hermitesche Operatoren  $\hat{q}_i$  und  $\hat{p}_i$  zu

$$q_i \rightarrow \hat{q}_i \quad \text{und} \quad p_i \rightarrow \hat{p}_i$$

und fordern die Kommutatorbeziehungen  $([\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$

$$[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar \delta_{ij}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0$$

$$H \rightarrow \hat{H}$$

$$\text{Observable} \quad F(p_i, q_j; t) \rightarrow \hat{F}(\hat{p}_i, \hat{q}_j; t)$$

- Heisenbergbild  $\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}]$
- Schrödingerbild  $\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle$

## 2. Kanonische Quantisierung von Bosefeldern

Übergang zur Kontinuumsbeschreibung

$$q_i(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \varphi_{\vec{x}}(t) = \varphi(\vec{x}, t), \quad (3.1)$$

$$L = \sum_i L_i \quad \Longrightarrow \quad L = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}[\varphi(\vec{x}, t), \partial_\mu \varphi(\vec{x}, t)]. \quad (3.2)$$

Hamiltonsches Prinzip:  $S = \int dt L \quad \Longrightarrow \quad S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \overbrace{\delta(\partial_\mu \varphi)}^{= \partial_\mu \delta \varphi} \right\} \quad (3.3)$$

$$= \int_\Omega d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right\} \delta \varphi + \underbrace{\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right\}}_{=0} \quad (3.4)$$

Der Gaußsche Satz wandelt den zweiten Term in ein Oberflächenintegral um. Da nach Voraussetzung die Variation  $\delta \varphi$  auf der Oberfläche  $\partial \Omega$  verschwinden soll, trägt dieser Term nicht bei. Wenn wir nun annehmen, dass  $\delta \varphi$  eine beliebige infinitesimale Variation darstellt, dann muss der Ausdruck in der geschweiften Klammer des ersten Terms am stationären Punkt  $\delta S = 0$  gleich Null sein:

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0}. \quad (3.5)$$

**Beachte:** Bei einer Lorentz-kovarianten Feldtheorie sind  $\mathcal{L}$  und  $S$  *Lorentz-Skalare*. Die daraus abgeleitete Dynamik ist dann quasi "automatisch" Lorentz-kovariant.

Verallgemeinerung auf mehrkomponentiges Feld:  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N), \quad \varphi \rightarrow \Phi_r$

$$\boxed{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_r} = 0}, \quad r = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

Kanonisch konjugierte Impulsdichte:

$$\Pi_r(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_r)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r}. \quad (3.7)$$

Völlig analog zum mechanischen Fall erhalten wir mit der entsprechenden Legendre Transformation die Hamiltonsche Dichte  $\mathcal{H}$  bzw. die Hamiltonsche Funktion  $H$ ,

$$\mathcal{H}(\vec{x}, t) = \sum_r \Pi_r(\vec{x}, t) (\partial_0 \varphi(\vec{x}, t)) - \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(\vec{x}, t) . \quad (3.9)$$

### Feldquantisierung:

Analog zur Quantisierung in der Punktmechanik werden die Felder  $\varphi_r(\vec{x}, t)$  und  $\Pi_r(\vec{x}, t)$  mit Operatoreigenschaft ausgestattet,

$$\varphi_r(\vec{x}, t) \rightarrow \hat{\varphi}_r(\vec{x}, t) , \quad \text{und} \quad \Pi_r(\vec{x}, t) \rightarrow \hat{\Pi}_r(\vec{x}, t) .$$

Wegen der Zeitabhängigkeit dieser Operatoren sind wir natürlicherweise im Heisenbergbild. Die Quantisierungsvorschrift gilt für *Gleichzeitigkeits-Kommutatoren*.

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\Pi}_r(\vec{x}, t), \hat{\varphi}_s(\vec{x}', t) \right] &= -i\hbar \delta_{rs} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') , \\ \left[ \hat{\Pi}_r(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_s(\vec{x}', t) \right] &= [\hat{\varphi}_r(\vec{x}, t), \hat{\varphi}_s(\vec{x}', t)] = 0 . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Bewegungsgleichungen der Feldoperatoren lauten

$$\dot{\hat{\Pi}}_r(\vec{x}, t) = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}, \hat{\Pi}_r(\vec{x}, t) \right] , \quad (3.11)$$

$$\dot{\hat{\varphi}}_r(\vec{x}, t) = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}, \hat{\varphi}_r(\vec{x}, t) \right] , \quad (3.12)$$

bzw. für die allgemeine Operatorfunktion  $\hat{F} = \hat{F}(\hat{\varphi}_r(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_r(\vec{x}, t))$

$$\dot{\hat{F}} = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}, \hat{F} \right] . \quad (3.13)$$

Zweizeiten-Kommutatoren bestimmen sich aus den Bewegungsgleichungen und den Anfangsbedingungen (3.10).

### 3. Symmetrien und Erhaltungssätze

**Noether–Theorem:** Ist die Lagrangedichte–Funktion invariant unter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation, so folgt hieraus ein Erhaltungssatz.

Beispiele: Invarianz von  $\mathcal{L}$  unter

- |  |   |                                     |
|--|---|-------------------------------------|
| a) Raum–Zeit–Translationen                                     | → | lokale Impuls- und Energieerhaltung |
| b) Raumdrehungen   | → | lokale Drehimpulserhaltung          |
| c) U(1)–Symmetrie $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{-i\alpha}$ | → | lokale Ladungserhaltung             |

**Invarianz unter Raum–Zeit–Translationen:**

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + b^{\mu} \quad (3.14)$$

Annahme: Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  hänge nicht explizit von  $x^\mu$  ab, d.h.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}[\varphi(x^\mu), \partial_\nu \varphi(x^\mu)] . \quad (3.15)$$

Dann führt die infinitesimale Verschiebung

$$x'_\mu = x_\mu + \delta\varepsilon_\mu \quad (3.16)$$

zur folgenden Variation der Lagrange-Dichte,

$$\delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(x'_\mu) - \mathcal{L}(x_\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \delta\varepsilon_\mu = \partial_\nu g^{\nu\mu} \mathcal{L} \delta\varepsilon_\mu . \quad (3.17)$$

Andererseits ist

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \delta(\partial_\nu\varphi) = \underbrace{\left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \right)}_{=0} \delta\varphi + \partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \delta\varphi \right) ,$$

woraus mit  $\delta\varphi = (\partial^\mu\varphi) \delta\varepsilon_\mu$  folgt

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \partial^\mu\varphi \right) \delta\varepsilon_\mu . \quad (3.18)$$

Zieht man nun Gl.(3.17) von Gl.(3.18) ab und beachtet, dass  $\delta\varepsilon_\mu$  eine beliebige infinitesimale Verschiebung ist, so erhält man die vier lokalen Erhaltungssätze

$$\boxed{\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0} , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 , \quad (3.19)$$

wobei

$$T^{\nu\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi)} \partial^\mu\varphi - g^{\nu\mu} \mathcal{L} ,$$

$$T^{00} = \mathcal{H} .$$

### Eigenschaften des kanonischen Energie-Impuls-Tensors

$$T^{\nu\mu} = T_s^{\nu\mu} + T_a^{\nu\mu} , \quad T_s^{\nu\mu} = T_s^{\mu\nu} , \quad (3.20)$$

$$T_s^{00} = \mathcal{H} , \quad T_s^{0i} = p^i . \quad (3.21)$$

Lokale Impulserhaltung:

$$\partial_\nu T_s^{\nu i} = 0 , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

$$P^\nu = \int d^3\vec{x} T_s^{0\nu} , \quad \frac{\partial P^\nu}{\partial t} = 0 , \quad P^0 = H . \quad (3.23)$$

In der Elektrodynamik gilt:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) , \quad (3.24)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) . \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

- Von nun an setzen wir durchweg  $\hbar = c = 1$ .

## 3.2 Quantisierung des Klein–Gordon–Feldes

### 3.2.1 Das komplexe Skalarfeld

Seien  $\varphi_1(\vec{x}, t)$  und  $\varphi_2(\vec{x}, t)$  reelle Skalarfelder und sei mit ihnen ein komplexes Skalarfeld  $\varphi(\vec{x}, t)$  wie folgt gebildet,

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \varphi_1(\vec{x}, t) + i \varphi_2(\vec{x}, t) \right). \quad (3.27)$$

Offensichtlich repräsentieren  $\varphi(\vec{x}, t)$  und  $\varphi^*(\vec{x}, t)$  dynamisch unabhängige Felder.

Aus dem Hamiltonschen Prinzip, d.h. der Stationarität des Wirkungsfunktional

$$\delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi(\vec{x}, t), \varphi^*(\vec{x}, t), \partial_{\mu}\varphi(\vec{x}, t), \partial_{\mu}\varphi^*(\vec{x}, t)) \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.28)$$

ergeben sich bei Variation bezüglich  $\varphi^*(\vec{x}, t)$  bzw.  $\varphi(\vec{x}, t)$  die Feldgleichungen

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi^*} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0. \quad (3.29)$$

Die Lagrange-Dichte eines komplexen massiven Skalarfeldes lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, \varphi^*, \partial_{\mu}\varphi, \partial_{\mu}\varphi^*) &= (\partial_{\mu}\varphi^*)(\partial^{\mu}\varphi) - m^2\varphi^*\varphi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [(\partial_{\mu}\varphi_i)(\partial^{\mu}\varphi_i) - m^2\varphi_i\varphi_i]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Für diesen expliziten Ausdruck liefert Gl. (3.29) die Klein-Gordon Gleichung

$$\left[ \partial_{\mu}\partial^{\mu} + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi(\vec{x}, t) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \left[ \partial_{\mu}\partial^{\mu} + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi^*(\vec{x}, t) = 0. \quad (3.31)$$

Auf dem Weg zur Hamiltonschen Formulierung werden den Feldern  $\varphi(\vec{x}, t)$  und  $\varphi^*(\vec{x}, t)$  *kanonisch konjugierten Impulsdichtefelder*  $\Pi(\vec{x}, t)$  und  $\Pi^*(\vec{x}, t)$  zugeordnet,

$$\Pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*(\vec{x}, t) \quad \text{und} \quad \Pi^*(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}(\vec{x}, t). \quad (3.32)$$

Für die Hamiltondichte ergibt sich dann, nach Ausführung der entsprechenden Legendre Transformation

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\varphi} + \Pi^*\dot{\varphi}^* - \mathcal{L}, \quad (3.33)$$

der Ausdruck

$$\mathcal{H} = \Pi^* \Pi + (\vec{\nabla}\varphi^*)(\vec{\nabla}\varphi) + m^2\varphi^*\varphi. \quad (3.34)$$

### Feldquantisierung:

Bem.: Im Folgenden wird bei Feldoperatoren meist das  $\hat{\phantom{x}}$ -Symbol weggelassen.

Die kanonischen Quantisierungsregeln lauten

- $[\Pi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)] = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad [\Pi^\dagger(\vec{x}, t), \varphi^\dagger(\vec{x}', t)] = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$
- Alle anderen Kommutatoren der vier Feldoperatoren verschwinden

### Modenentwicklung:

Die Modenentwicklung der Feldoperatoren lautet

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} \left[ a_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + c_{\vec{k}}^\dagger f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) \right], \quad (3.35)$$

$$\varphi^\dagger(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} \left[ a_{\vec{k}}^\dagger f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) + c_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) \right], \quad (3.36)$$

wobei die Moden

$$f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (3.37)$$

die Orthonormierungsrelationen (siehe auch Gl. (2.54))

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{k}'}(\vec{x}, t) &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \\ \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{k}'}(\vec{x}, t) &= 0, \\ \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{\vec{k}'}^*(\vec{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

erfüllen. Wie zuvor bedeutet das Ableitungssymbol  $a \overleftrightarrow{\partial}_0 b = a \partial_0 b - (\partial_0 a) b$ .

Die entsprechenden Umkehrrelationen haben die Form

$$a_{\vec{k}} = \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\vec{x}, t), \quad (3.39)$$

$$c_{\vec{k}} = \int d^3\vec{x} f_{\vec{k}}^*(\vec{x}, t) i \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi^\dagger(\vec{x}, t), \quad (3.40)$$

und führen auf die Vertauschungsrelationen

$$\left[ a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \left[ c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Diese Ausdrücke machen unmittelbar folgendes evident:  $a_{\vec{k}}$  und  $c_{\vec{k}}$  erhalten die Bedeutung von Vernichtungsoperatoren, und  $a_{\vec{k}}^\dagger$  und  $c_{\vec{k}}^\dagger$  die Bedeutung von Erzeugungsoperatoren für

das  $a$ - bzw.  $c$ -Teilchen mit Impuls  $\vec{k}$ .  
Für die restlichen Kommutatoren gilt

$$\left[ a_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \left[ a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'} \right] = \left[ c_{\vec{k}}, c_{\vec{k}'} \right] = \left[ c_{\vec{k}}^\dagger, c_{\vec{k}'}^\dagger \right] = \left[ a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger \right] = 0 .$$

Als nächstes definieren wir die Operatoren

$$\hat{N}_a(\vec{k}) = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} , \quad \hat{N}_c(\vec{k}) = c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} , \quad (3.41)$$

welche wegen ihrer positiv-ganzzahligen Eigenwerte  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$  die Bedeutung von Teilchenzahloperatoren erhalten.

Die entsprechenden Teilchenzahleigenzustände, auch Fock-Zustände genannt, sind

$$\left| n_a(\vec{k}) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{a_{\vec{k}}}!}} \left( a_{\vec{k}}^\dagger \right)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle , \quad \left| n_c(\vec{k}) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{c_{\vec{k}}}!}} \left( c_{\vec{k}}^\dagger \right)^{n_{\vec{k}}} |0\rangle . \quad (3.42)$$

Hierbei bezeichnet  $|0\rangle$  den 0-Teilchen-Zustand bzw. - in feldtheoretischer Sprache - den Vakuumzustand, d.h.  $a_{\vec{k}} |0\rangle = c_{\vec{k}} |0\rangle = 0$  für alle  $\vec{k}$ . Die Orthogonalitätsrelation lautet

$$\langle n_a(\vec{k}) | n_c(\vec{k}') \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_a(\vec{k})!}} \frac{1}{\sqrt{n_c(\vec{k}')!}} \langle 0 | a_{\vec{k}}^{n_{\vec{k}}} (c_{\vec{k}'}^\dagger)^{n_{\vec{k}'}} |0\rangle = 0 , \quad (3.43)$$

Die Modenentwicklung ergibt für den Hamiltonoperator die Form

$$\hat{H} = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} \omega_{\vec{k}} \left[ a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} \right] . \quad (3.44)$$

Entsprechend ergibt sich für den Ladungsoperator

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} q \int d^3\vec{x} j^0(\vec{x}, t) = 0 , \quad (3.45)$$

$$\hat{Q} = q \int d^3\vec{k} \left[ a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} \right] . \quad (3.46)$$

Normalordnungsvorschrift:

$$\begin{aligned} : \hat{H} : &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \int d^3\vec{k} \omega_{\vec{k}} \left[ a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} \right] \\ : \hat{Q} : &\stackrel{\text{def}}{=} \hat{Q} - \langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle = q \int d^3\vec{k} \left[ a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} - c_{\vec{k}}^\dagger c_{\vec{k}} \right] \end{aligned}$$

Generell gilt also für beliebige Operatoren  $\hat{O}$  in Normalordnung,  $\langle 0 | : \hat{O} : | 0 \rangle = 0$ .

### Deutung:

$a$ -Teilchen tragen die Ladung  $q$ ,  $c$ -Teilchen die Ladung  $-q$ .

Invarianz von  $\mathcal{L}$  unter Phasentransformationen,  $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi e^{i\alpha}$  führt auf die Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie.

Zustände fester Teilchenzahl:

$$\left| \vec{x}, t \right\rangle_{+q} = \varphi^\dagger(\vec{x}, t) |0\rangle , \quad \left| \vec{x}, t \right\rangle_{-q} = \varphi(\vec{x}, t) |0\rangle . \quad (3.47)$$

### 1-Teilchen-Ortswellenfunktion

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}, t | \vec{k} \rangle_{+q} &= \langle 0 | \varphi(\vec{x}, t) a_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle = f_{\vec{k}}(\vec{x}, t), \\ \langle \vec{x}, t | \vec{k} \rangle_{-q} &= \langle 0 | \varphi^\dagger(\vec{x}, t) c_{\vec{k}}^\dagger | 0 \rangle = f_{\vec{k}}(\vec{x}, t).\end{aligned}$$

### 2-Teilchen-Ortswellenfunktion

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2; t | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle_{+2q} &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | \varphi(\vec{x}_1, t) \varphi(\vec{x}_2, t) a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \int d^3 \vec{k}' \int d^3 \vec{k}'' f_{\vec{k}'}(\vec{x}_1, t) f_{\vec{k}''}(\vec{x}_2, t) \langle 0 | \underbrace{a_{\vec{k}'} a_{\vec{k}''} a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger}_{= \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}_1) \delta^3(\vec{k}'' - \vec{k}_2) + \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}_2) \delta^3(\vec{k}'' - \vec{k}_1)} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} [f_{\vec{k}_1}(\vec{x}_1, t) f_{\vec{k}_2}(\vec{x}_2, t) + f_{\vec{k}_1}(\vec{x}_2, t) f_{\vec{k}_2}(\vec{x}_1, t)].\end{aligned}$$

### n-Teilchen-Ortswellenfunktion

$$\langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n; t | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \rangle_{+q} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \varphi(\vec{x}_1, t) \dots \varphi(\vec{x}_n, t) \underbrace{a_{\vec{k}_1}^\dagger \dots a_{\vec{k}_n}^\dagger}_{\substack{\varphi^\dagger \\ c^\dagger}} | 0 \rangle$$

falls auch Teilchen neg. Ladung  $-q$ :

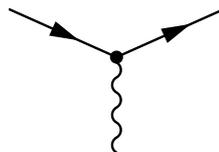
### Feynman-Propagator:

$$\begin{aligned}\Delta_F(x' - x) &\equiv \langle 0 | T(\varphi(x') \varphi^\dagger(x)) | 0 \rangle \\ &= \Theta(t' - t) \langle 0 | \varphi(x') \varphi^\dagger(x) | 0 \rangle + \Theta(t - t') \langle 0 | \varphi^\dagger(x) \varphi(x') | 0 \rangle\end{aligned}$$

### Diagramme:

- Pfeil in Lesrichtung: Teilchen
- Pfeil entgegen der Lesrichtung: Antiteilchen

### Fundamentaldiagramm:



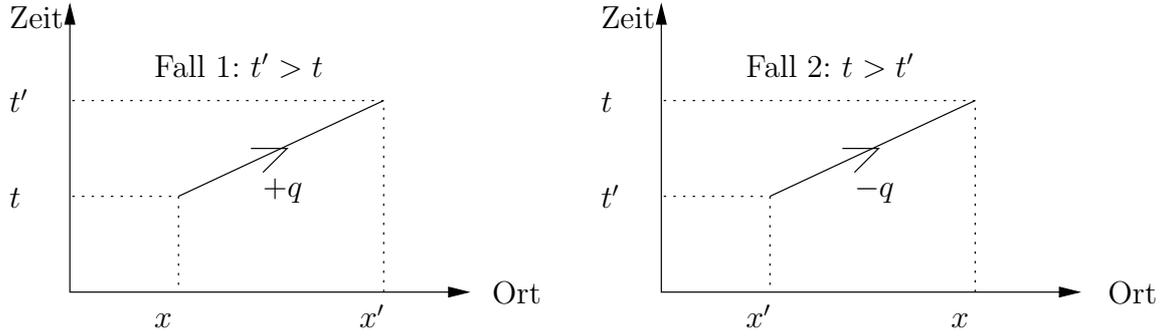


Abbildung 3.1: Die Fälle 1,  $t' > t$ , und 2,  $t' < t$ .

### 3.2.2 Der Feynman-Propagator

Der Feynman-Propagator zum komplexen Klein-Gordon-Feld beschreibt die kausale Propagation des Teilchens und des zugehörigen Antiteilchens,

$$i\Delta_{\text{F}}(x' - x) := \langle 0 | T(\varphi(x') \varphi^\dagger(x)) | 0 \rangle . \quad (3.48)$$

Hierbei bezeichnet  $T$  den Zeitordnungsoperator, der wie folgt definiert ist:

$$T(a(x)b(x')) := \Theta(t - t')a(x)b(x') + \varepsilon \Theta(t' - t)b(x')a(x) ,$$

wobei  $\varepsilon = +1$  für Bosefelder und  $\varepsilon = -1$  für Fermifelder ist. Damit wird (3.48) zu

$$i\Delta_{\text{F}}(x' - x) = \underbrace{\Theta(t' - t) \langle 0 | \varphi(x') \varphi^\dagger(x) | 0 \rangle}_{\text{Fall 1}} + \underbrace{\Theta(t - t') \langle 0 | \varphi^\dagger(x) \varphi(x') | 0 \rangle}_{\text{Fall 2}} . \quad (3.49)$$

Die beiden Fälle sind in der Abbildung 3.1 veranschaulicht. Explizit ausgeschrieben nimmt (3.49) die Form

$$i\Delta_{\text{F}}(x' - x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ \Theta(t' - t) e^{-ik_\mu(x' - x)^\mu} + \Theta(t - t') e^{ik_\mu(x' - x)^\mu} \right\}$$

an, wobei  $k_0 = k^0$  die on-shell Energie ist, d.h.  $k^0 = \omega_{\vec{k}} := \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ ,

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \overbrace{\frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} \left\{ \Theta(t' - t) e^{-ik_0(t' - t)} + \Theta(t - t') e^{ik_0(t - t')} \right\}}^{= J} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}' - \vec{x})} \overbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(t' - t)}}{(k_0 - \omega_{\vec{k}} + i\varepsilon)(k_0 + \omega_{\vec{k}} - i\varepsilon)}}^{= J} . \end{aligned}$$

Die Äquivalenz der beiden Ausdrücke für  $J$  ergibt sich unmittelbar unter Verwendung des Residuensatzes für die  $k_0$ -Integration (siehe Abb. 3.2).

Somit können die Integrationen zum vierdimensionalen  $k^\mu$ -Fourierintegral zusammengefasst werden. Wir erhalten

$$\Delta_{\text{F}}(x' - x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \underbrace{\frac{1}{k_\mu k^\mu - m^2 + i\varepsilon}}_{= \Delta_{\text{F}}(\vec{k})} e^{-ik_\mu(x' - x)^\mu},$$

wobei  $\Delta_{\text{F}}(\vec{k})$  der Feynman-Propagator im  $k^\mu$ -Raum ist. Aus dieser Form ist unmittelbar einsichtig, dass der Feynman-Propagator  $\Delta_{\text{F}}(x' - x)$  die Einteilchen-Green-Funktion der Klein-Gordon-Gleichung darstellt. Er genügt nämlich der Differentialgleichung mit Raum-Zeit  $\delta$ -Inhomogenität

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_{\text{F}}(x' - x) = -\delta^4(x' - x).$$

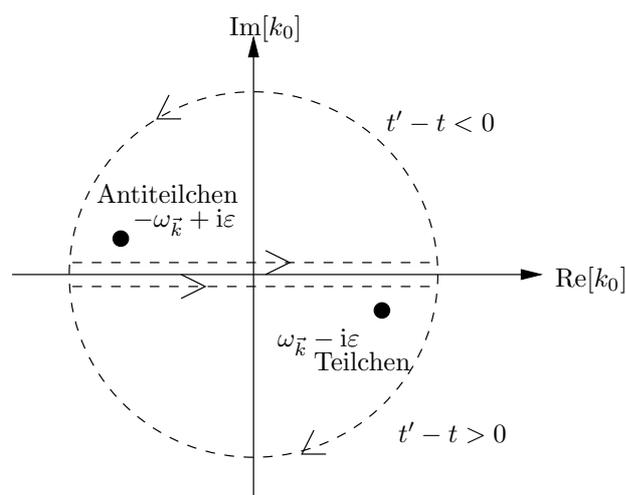


Abbildung 3.2: Polstellen der Funktion  $J$  sowie mögliche Integrationskonturen

## 3.3 Quantisierung des Dirac-Feldes

### 3.3.1 Kanonischer Formalismus

Wir betrachten die Spinorfeldkomponenten  $\underline{\psi}_\alpha$  (bzw. auch die Dirac-adjungierten Komponenten  $\bar{\psi}_\alpha$ ) als vier unabhängige dynamische Variable.

Gesucht ist ein Lagrangedichtefunktional  $\mathcal{L}$  derart, dass das Euler–Lagrange–Variationsprinzip

$$\boxed{\delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L} \stackrel{!}{=} 0}$$

auf die Dirac–Gleichung führt. Da  $\mathcal{L}$  ein Lorentz–Skalar und bilinear in den Spinorfeldern sein muss, können wir  $\mathcal{L}$  erraten zu

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}] \underline{\psi} .$$

Die Variation nach den Komponenten von  $\bar{\psi}_\alpha$  ergibt

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}) \underline{\psi} \Big|_\alpha = 0 ,$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$(i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - m\delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta = 0 , \quad \text{für } \alpha \in \{1, \dots, 4\} .$$

Die zu  $\psi_\alpha(\vec{x}, t)$  kanonisch konjugierte Impulsdichte  $\Pi_\alpha(\vec{x}, t)$  berechnet sich zu

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger = i(\bar{\psi}\gamma^0)_\alpha .$$

Für die Hamilton–Dichte erhalten wir den Ausdruck

$$\mathcal{H} = \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} = \bar{\psi} [m\mathbb{1} - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}] \underline{\psi} = \bar{\psi} i\gamma^0 \partial_0 \underline{\psi} .$$

Die Hamiltonfunktion erhält man schließlich, indem man die Hamilton–Dichte über das Systemvolumen integriert,

$$\boxed{H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}} .$$

Ladungserhaltung:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu \underline{\psi}$$

$$Q = \int d^3\vec{x} j^0(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} = 0}$$

$$\boxed{Q = q \int d^3\vec{x} \bar{\psi}\gamma^0 \underline{\psi} = q \int d^3\vec{x} \underline{\psi}^\dagger \underline{\psi}}$$

**Modenentwicklung:**

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\vec{x}, t) &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}} [b(\vec{p}, s) \underline{u}(\vec{p}, s) e^{-ip_\mu x^\mu} + d^*(\vec{p}, s) \underline{v}(\vec{p}, s) e^{ip_\mu x^\mu}] \\ &= \underline{\psi}^{(+)}(\vec{x}, t) + \underline{\psi}^{(-)}(\vec{x}, t) . \end{aligned} \tag{3.50}$$

Hierbei ist  $p_0$  die on-shell Energie,  $p_0 = \omega_{\vec{p}} := \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ , d.h. der Vierervektor  $p^\mu$  erfüllt die Massenschalenbedingung  $p_\mu p^\mu = m^2$ . Der erste Term in der eckigen Klammer trägt zum Zustandsanteil positiver Energie  $\underline{\psi}^{(+)}(\vec{x}, t)$  und der zweite Term zum Zustandsanteil negativer Energie  $\underline{\psi}^{(-)}(\vec{x}, t)$  bei. Die Spinorfunktionen  $\underline{u}(\vec{p}, s)$  und  $\underline{v}(\vec{p}, s)$  genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu - m\mathbb{1}) \underline{u}(\vec{p}, s) &= 0, \\(\gamma^\mu p_\mu + m\mathbb{1}) \underline{v}(\vec{p}, s) &= 0.\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen (2.202) erhält die Hamiltonfunktion nach Einsetzen der Modenentwicklung (3.50) die Form

$$H = \sum_s \int d^3\vec{p} \omega_{\vec{p}} [b^*(\vec{p}, s)b(\vec{p}, s) - d(\vec{p}, s)d^*(\vec{p}, s)].$$

Die Hamilton Funktion bzw. Gesamtenergie kann somit sowohl auf einen positiven als auch auf einen negativen Wert gesetzt werden, je nachdem ob die Beiträge zu positiver oder zu negativer Energie überwiegen. In analoger Weise erhält man für die Gesamtladung  $Q$  den positiv definiten Ausdruck

$$Q = q \sum_s \int d^3\vec{p} [b^*(\vec{p}, s)b(\vec{p}, s) + d(\vec{p}, s)d^*(\vec{p}, s)].$$

Im Rahmen der klassischen Feldtheorie ergibt sich also  $H \geq 0$  und  $Q$  positiv definit.

### Zweitquantisierung:

In der Zweitquantisierung erhalten  $b(\vec{p}, s)$  und  $d(\vec{p}, s)$  die Bedeutung von Vernichtungsoperatoren und  $b^\dagger(\vec{p}, s)$  ( $b^*(\vec{p}, s) \rightarrow b^\dagger(\vec{p}, s)$ ) sowie  $d^\dagger(\vec{p}, s)$  ( $d^*(\vec{p}, s) \rightarrow d^\dagger(\vec{p}, s)$ ) die Bedeutung von Erzeugungsoperatoren. Wie bei der Zweitquantisierung des Klein-Gordon-Feldes liegt nun die Forderung nahe, dass das Spektrum des Feldhamiltonoperators  $\hat{H}$  positiv definit sein soll, während die Eigenwerte des Ladungsoperators  $\hat{Q}$  sowohl positiv als auch negativ sein können. Um dies zu erreichen, müssen in den kanonischen Quantisierungsregeln für die Dirac-Feldoperatoren anstatt der Kommutatoren Anti-Kommutatoren gewählt werden. Der Antikommutator wird im folgenden durch eine geschweifte Klammer gekennzeichnet,

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}.$$

Explizit sehen die kanonischen Quantisierungsvorschriften somit wie folgt aus:

- für die Feldoperatoren im Ortsraum:

$$\begin{aligned}\{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \{\psi_\alpha(\vec{x}, t), \psi_\beta(\vec{x}', t)\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0,\end{aligned}$$

- bzw. für die Feldoperatoren im Impulsraum:

$$\begin{aligned}\{b(\vec{p}, s), b^\dagger(\vec{p}', s')\} &= \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ \{b(\vec{p}, s), b(\vec{p}', s')\} &= \{b(\vec{p}, s), d(\vec{p}', s')\} = \{b(\vec{p}, s), d^\dagger(\vec{p}', s')\} = 0\end{aligned}$$

Teilchenzahloperatoren:

$$\begin{aligned}\hat{N}_b(\vec{p}, s) &= b^\dagger(\vec{p}, s)b(\vec{p}, s), \\ \hat{N}_d(\vec{p}, s) &= d^\dagger(\vec{p}, s)d(\vec{p}, s).\end{aligned}\tag{3.51}$$

Einteilchenzustand des "b"-Teilchens:  $|\vec{p}, s\rangle = b^\dagger(\vec{p}, s)|0\rangle$

2-Teilchenzustand:

$$\begin{aligned}|\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger(\vec{p}_1, s_1)b^\dagger(\vec{p}_2, s_2)|0\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger(\vec{p}_2, s_2)b^\dagger(\vec{p}_1, s_1)|0\rangle \\ &= -|\vec{p}_2, s_2; \vec{p}_1, s_1\rangle.\end{aligned}$$

Entsprechend werden die Teilchenzustände des „d“-Teilchens ( d.h. des Antiteilchens) gebildet. Wegen der Antikommutatoreigenschaft der Feldoperatoren ist es nicht möglich, 2 identische Dirac-Teilchen im gleichen Einteilchen-Zustand zu präparieren. Denn es gilt

$$|\vec{p}, s; \vec{p}, s\rangle = -|\vec{p}, s; \vec{p}, s\rangle = 0.$$

Es folgt ferner aus den Antikommutator-Beziehungen, dass die Teilchenzahloperatoren  $\hat{N}_b$  und  $\hat{N}_d$  nur die Eigenwerten 0 und 1 besitzen. Beachte ferner, dass die Teilchenzahloperatoren  $\hat{N}_b$  und  $\hat{N}_d$  *boson-artig* sind, da sie miteinander kommutieren,

$$[\hat{N}_i(\vec{p}, s), \hat{N}_j(\vec{p}', s')] = 0.$$

### Normalordnung

$$\begin{aligned}: \hat{H} : &= \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_s \int d^3\vec{p} \omega_{\vec{p}} \left[ \hat{N}_b(\vec{p}, s) + \hat{N}_d(\vec{p}, s) \right] \\ : \hat{Q} : &= \hat{Q} - \langle 0 | \hat{Q} | 0 \rangle = q \sum_s \int d^3\vec{p} \left[ \hat{N}_b(\vec{p}, s) - \hat{N}_d(\vec{p}, s) \right]\end{aligned}$$

Wirkungsweise der Operatoren  $b^\dagger$ ,  $b$ ,  $d^\dagger$  und  $d$ :

- $b^\dagger(\vec{p}, s)$  erzeugt ein Dirac-Teilchen der Ladung  $q$  und der Energie  $\omega_{\vec{p}}$ .
- $b(\vec{p}, s)$  vernichtet ein Dirac-Teilchen der Ladung  $q$  und der Energie  $\omega_{\vec{p}}$ .

- $d^\dagger(\vec{p}, s)$  erzeugt ein Dirac–Teilchen der Ladung  $-q$  und der Energie  $\omega_{\vec{p}}$ .
- $d(\vec{p}, s)$  vernichtet ein Dirac–Teilchen der Ladung  $-q$  und der Energie  $\omega_{\vec{p}}$ .

Somit ist das Stabilitätsproblem aufgelöst, da sowohl das Teilchen als auch das Antiteilchen ein positiv-definites Energiespektrum besitzt!

Beachte: Der Vakuumzustand (Grundzustand) besitzt den Eigenwert Null für alle normalgeordneten Operatoren.

### 3.3.2 Der Feynman–Propagator

$$\begin{aligned} iS_{F,\alpha\beta}(x' - x) &= \langle 0 | T(\underline{\psi}_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x)) | 0 \rangle \\ &= \Theta(t' - t) \langle 0 | \underline{\psi}_\alpha(x') \bar{\psi}_\beta(x) | 0 \rangle - \Theta(t - t') \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x) \underline{\psi}_\alpha(x') | 0 \rangle . \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Modenentwicklung der Feldoperatoren erhalten wir

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega_{\vec{p}}} \left[ \Lambda_+(\vec{p}) e^{-ip_\mu(x'-x)^\mu} \Theta(t' - t) + \Lambda_-(\vec{p}) e^{ip_\mu(x'-x)^\mu} \Theta(t - t') \right] \\ &= (i\gamma^\mu \partial_{x'_\mu} + m\mathbb{1}) \Delta_F(x' - x) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'-x)^\mu} \frac{\not{p} + m\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i0^+} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'-x)^\mu} \frac{1}{\not{p} - m + i0^+} , \end{aligned}$$

wobei  $\Delta_F$  der Klein–Gordon–Propagator ist,

$$\Delta_F(x' - x) = -i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left[ \Theta(t' - t) e^{-ip_\mu(x'-x)^\mu} + \Theta(t - t') e^{ip_\mu(x'-x)^\mu} \right] .$$

Die Projektionsoperatoren  $\Lambda_\pm(\vec{p}) = \frac{m \pm \not{p}}{2m}$  projizieren auf den Unterraum des Teilchens bzw. des Antiteilchens. Sie besitzen die Eigenschaften

$$\Lambda_\pm(\vec{p}) \Lambda_\mp(\vec{p}) = 0 ,$$

$$\Lambda_+(\vec{p}) \underline{u}(\vec{p}, s) = \underline{u}(\vec{p}, s) , \quad \Lambda_+(\vec{p}) \underline{v}(\vec{p}, s) = 0 ,$$

$$\Lambda_-(\vec{p}) \underline{v}(\vec{p}, s) = \underline{v}(\vec{p}, s) , \quad \Lambda_-(\vec{p}) \underline{u}(\vec{p}, s) = 0 .$$

**Propagator des Dirac–Teilchens in Energie–Impuls–Darstellung:**

$$S_{F,\beta\alpha}(x' - x) = -i \langle 0 | T(\underline{\psi}_\beta(x') \bar{\psi}_\alpha(x)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'-x)^\mu} S_{F,\beta\alpha}(p) ,$$

$$S_{F,\beta\alpha}(p) = \frac{\gamma_{\beta\alpha}^{\mu} p_{\mu} + m \delta_{\beta\alpha}}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i0^+} ,$$

$$S_F(p) = (\not{p} + m\mathbb{1}) \Delta_F(p) = \frac{\not{p} + m\mathbb{1}}{p_{\mu} p^{\mu} - m^2 + i0^+} = \frac{1}{\not{p} - m\mathbb{1} + i0^+} .$$

**Propagator des skalaren Klein–Gordon–Teilchens:** (zum Vergleich)

$$\Delta_F(x' - x) = -i \langle 0 | T(\phi(x') \phi^{\dagger}(x)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik_{\mu}(x'-x)^{\mu}} \Delta_F(k) ,$$

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{k_{\mu} k^{\mu} - m^2 + i0^+} .$$

## 3.4 Quantisierung des Maxwell–Feldes

### 3.4.1 Die klassischen Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 , \quad (= 4\pi\rho) \qquad \operatorname{rot} \vec{B} - \dot{\vec{E}} = \vec{0} , \quad (= 4\pi\vec{j}) \quad (3.52)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 , \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0} . \quad (3.53)$$

Vermöge des Feldstärketensors

$$F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

lassen sich die Feldgleichungen (3.52) und (3.53) wie folgt in kovarianter Form darstellen,

$$\partial_{\nu} F^{\nu\mu} = 0 , \quad (= 4\pi j^{\mu}) \qquad \mu \in \{0, 1, 2, 3\} , \quad (3.54)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\nu} F_{\rho\sigma} = 0 , \qquad \mu \in \{0, 1, 2, 3\} . \quad (3.55)$$

Im Folgenden werden nur die freien Felder betrachtet.

Nach Einführung der elektromagnetischen Potentiale  $\vec{A}$  und  $\varphi$ , welche mit den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  durch die Beziehungen  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$  und  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \dot{\vec{A}}$  verknüpft sind, lässt sich der Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$  durch das Viererpotential  $A^{\mu}$  mit  $A^0 = \varphi$  wie folgt ausdrücken,

$$F^{\nu\mu} = \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} A^{\nu} .$$

Damit wird Gl. (3.54) zu

$$\partial_{\nu} \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} (\partial_{\nu} A^{\nu}) = 0 . \quad (3.56)$$

Desweiteren ist die Eichinvarianz

$$F^{\nu\mu} = F^{\nu\mu}$$

für alle Transformationen der Art (sog. Eichtransformationen)

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$$

gewährleistet, falls die Integrabilitätsbedingung  $\partial^\nu \partial^\mu \Lambda(x) = \partial^\mu \partial^\nu \Lambda(x)$  erfüllt ist. Das gekoppelte Gleichungssystem (3.56) lässt sich durch die sog. Lorentz–Eichung  $\partial_\nu A^\nu = 0$  entkoppeln. Somit reduziert sich in dieser Eichung Gl. (3.55) auf

$$\boxed{\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0}.$$

**Anmerkung:** Die Lorentz–Eichung legt das Viererpotential  $A^\mu$  noch nicht eindeutig fest. Es sind weiterhin sog. eingeschränkte Eichtransformationen der Form

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda^{(0)}(x)$$

möglich, wobei die Einschränkung darin besteht, dass das Skalarfeld  $\Lambda^{(0)}(x)$  der sogenannten d’Alembert–Gleichung genügt,

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\nu \partial^\nu \Lambda^{(0)}(x) = 0}.$$

Die weitere Nebenbedingung, die  $A^\mu(x)$  eindeutig machen würde, lässt sich nicht in Lorentz–invarianter Weise formulieren.

### Strahlungseichung:

In der Strahlungseichung wird das skalare Potential gleich Null gesetzt und das Vektorpotential als reines Transversalfeld angesetzt,

$$\varphi(\vec{r}, t) = 0, \quad \text{und} \quad \text{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (3.57)$$

Diese Wahl für  $\varphi$  und  $\vec{A}$  kann in einem gegebenen Inertialsystem stets getroffen werden. Beachte: die Strahlungseichung ist nicht kovariant, d. h. die einfache Form (3.57) geht beim Übergang in ein anderes Inertialsystem verloren.

Die Strahlungseichung verdeutlicht, dass das elektromagnetische Feld in Wirklichkeit nur zwei innere Freiheitsgrade besitzt. In der Strahlungseichung sind dies die beiden Transversalkomponenten des Vektorpotentials. Der longitudinale Freiheitsgrad ist wegen der Eichinvarianz der Elektrodynamik „eingefroren“. Dies erkennt man daran, dass er durch eine geeignete Eichtransformation wegtransformiert werden kann. Verantwortlich für diese Besonderheit der Elektrodynamik ist, dass die Dispersionsrelation keine Energielücke aufweist,  $\lim_{|\vec{k}| \rightarrow 0} \omega_{\vec{k}} = 0$ , oder in anderen Worten, dass das Photon masselos ist. Würde man einen Masseterm in die Bewegungsgleichungen „per Hand“ einfügen, dann besäße das freie elektromagnetische Feld auch einen zusätzlichen longitudinalen Freiheitsgrad; jedoch ginge dabei die Eichinvarianz–Symmetrie und damit letztendlich die Renormierbarkeit der Quantenelektrodynamik–Feldtheorie verloren.

### 3.4.2 Quantisierung in der Strahlungseichung

Üblicherweise geht man nun zu sog. Heaviside-Einheiten über, um den allgegenwärtigen Faktor  $\frac{1}{4\pi}$  loszuwerden. Mit dem cgs-System besteht der Zusammenhang

$$\vec{E}_H = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \vec{E}_{\text{cgs}}.$$

Die Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\vec{E}^2 - \vec{B}^2] = \frac{1}{2} \left\{ \dot{A}^2 - (\text{rot}\vec{A})^2 \right\}.$$

Die kanonisch konjugierten Impulsdichten berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, & \Rightarrow & \quad A_0 \text{ ist keine dynamische Variable} \\ \Pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}_i = -\dot{A}^i = E^i. \end{aligned}$$

Damit erhält die Hamiltonsche Dichte die Form

$$\mathcal{H} = \underbrace{\Pi^\mu \dot{A}_\mu}_{= \dot{A}^i \dot{A}_i = \vec{E}^2} - \mathcal{L} = \vec{E}^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2].$$

**Quantisierung mit Nebenbedingungen** Es sei die Nebenbedingung

$$\text{div}\vec{A} = \text{div}\vec{E} = 0 \tag{3.58}$$

vorgegeben. Wir fordern nun die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [A^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [E^i(\vec{x}, t), E^j(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\Pi^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] &= [E^i(\vec{x}, t), A^j(\vec{x}', t)] = -i \underbrace{\delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')}_{\Rightarrow \delta_{ij}^{(\text{tr})}(\vec{x} - \vec{x}')} \end{aligned} \tag{3.59}$$

Um die Nebenbedingung (3.58) zu gewährleisten, muss auf der rechten Seite von (3.59) der Ausdruck  $\delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$  in  $\delta_{ij}^{(\text{tr})}(\vec{x} - \vec{x}')$  abgeändert werden, wobei gelten muss

$$\partial_i \delta_{ij}^{(\text{tr})}(\vec{x} - \vec{x}') = \partial_j \delta_{ij}^{(\text{tr})}(\vec{x} - \vec{x}') = 0.$$

Dies kann erreicht werden, indem wir in der Fourierintegraldarstellung von  $\delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$  den longitudinalen Anteil eliminieren,

$$\delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Rightarrow \delta_{ij}^{(\text{tr})}(\vec{x} - \vec{x}') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}.$$

Die Modenentwicklung für  $A^i(\vec{x}, t)$  lautet

$$A^i(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \varepsilon^i(\vec{k}, \lambda) \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left\{ a(\vec{k}, \lambda) e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ik_\mu x^\mu} \right\}. \quad (3.60)$$

Hierbei ist  $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$  und die Lichtgeschwindigkeit auf  $c = 1$  festgelegt. Mit der Entwicklung (3.60) ergibt sich für das elektrische Feld die Modenentwicklung

$$E^i(\vec{x}, t) = -\dot{A}^i(\vec{x}, t) = i \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \varepsilon^i(\vec{k}, \lambda) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left\{ a(\vec{k}, \lambda) e^{-ik_\mu x^\mu} - a^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ik_\mu x^\mu} \right\}.$$

Die Polarisationsvektoren  $\vec{\varepsilon}(\vec{k}, 1)$  und  $\vec{\varepsilon}(\vec{k}, 2)$  bilden zusammen mit dem Wellenvektor  $\vec{k}$  ein orthogonales Dreibein, d.h. sie erfüllen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{k} &= 0, \\ \vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{k}, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned}$$

Die Leiteroperatoren  $a(\vec{k}, \lambda)$  und  $a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$  genügen den Kommutatorbeziehungen

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}, \lambda), a(\vec{k}', \lambda')] &= [a^\dagger(\vec{k}, \lambda), a^\dagger(\vec{k}', \lambda')] = 0, \\ [a(\vec{k}, \lambda), a^\dagger(\vec{k}', \lambda')] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned}$$

Die Modenentwicklung bringt den normalgeordneten Hamiltonoperator in die Form

$$:\hat{H}: = \hat{H} - \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left\{ : \vec{E}^2 : + : \vec{B}^2 : \right\} = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} |\vec{k}| a^\dagger(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda).$$

Der Vakuumzustand  $|0\rangle$  ist bestimmt durch die Beziehung

$$a(\vec{k}, \lambda) |0\rangle = 0, \quad \text{für alle } \vec{k} \text{ und } \lambda.$$

Ein beliebiger  $n$ -Photon Fock-Zustand lässt sich aus dem Vakuumzustand durch  $n$ -faches Anwenden des Erzeugungsoperators  $a^\dagger(\vec{k}, \lambda)$  generieren, also zum Beispiel

$$|n_{\vec{k}_1, \lambda_1}, n_{\vec{k}_2, \lambda_2}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{(n_{\vec{k}_1, \lambda_1})! (n_{\vec{k}_2, \lambda_2})!}} \left( a^\dagger(\vec{k}_1, \lambda_1) \right)^{n_{\vec{k}_1, \lambda_1}} \left( a^\dagger(\vec{k}_2, \lambda_2) \right)^{n_{\vec{k}_2, \lambda_2}} \dots |0\rangle.$$

### 3.4.3 Der Feynman–Propagator des Photons

Mit den bereits hergeleiteten Ergebnissen gewinnt man für den Feynmanpropagator des Photons die folgenden Darstellungen

$$\begin{aligned}
 D_{\text{F},\nu\mu}^{(\text{tr})}(x' - x) &= -i \langle 0 | T (A_\nu(x') A_\mu(x)) | 0 \rangle \\
 &= -i \Theta(t' - t) \langle 0 | A_\nu(x') A_\mu(x) | 0 \rangle + i \Theta(t - t') \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \\
 &= -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{k}|} \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \\
 &\quad \times \left[ \Theta(t' - t) e^{-i k_\rho (x' - x)^\rho} + \Theta(t - t') e^{i k_\rho (x' - x)^\rho} \right] \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k_\sigma (x' - x)^\sigma}}{k_\rho k^\rho + i0^+} \underbrace{\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\nu(\vec{k}, \lambda) \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)}_{= -g_{\nu\mu} + \text{eichabhängige Terme}} .
 \end{aligned}$$

Die eichabhängigen Terme können weggelassen werden, wenn wir nur transversal polarisierte Anfangs–Photonzustände propagieren. Die Fourierintegraldarstellung dieses eichkovarianten Propagators hat somit die Gestalt

$$\begin{aligned}
 D_{\text{F},\nu\mu}^{(\text{tr})}(x' - x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Delta_{\text{F},\nu\mu}(k) e^{-i k_\sigma (x' - x)^\sigma} , \\
 \Delta_{\text{F},\nu\mu}(k) &= \frac{-g_{\nu\mu}}{k_\rho k^\rho + i0^+} .
 \end{aligned}$$

# 4 Elementarprozesse

## 4.1 Wechselwirkende Quantenfelder

### 4.1.1 Allgemeine Betrachtung

Bisher haben wir nur nichtwechselwirkende Quantenfelder betrachtet, d.h. Felder, die linearen Feldgleichungen genügen (freies Dirac-, Klein–Gordon- und Maxwell-Feld). Im Falle wechselwirkender Quantenfelder lässt sich die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  in der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

schreiben, wobei  $\mathcal{L}_0$  die Lagrangedichte der freien Felder darstellt und  $\mathcal{L}_I$  die Wechselwirkung beschreibt. Falls letztere nicht von den Ableitungen der Felder abhängt, dann ist die Feldquantisierung völlig analog zum nichtwechselwirkenden Fall.

Die naheliegende  $\phi^3$ -Feldtheorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0,\text{KG}}(\phi, \partial_\mu \phi) - \frac{g}{3}\phi^3 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{0,\text{KG}}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{g}{3}\phi^3$$

ist physikalisch unbefriedigend, da sie weder für  $g > 0$  noch für  $g < 0$  einen stabilen Grundzustand besitzt.

Dagegen weist die sog.  $\phi^4$ -Theorie für  $g > 0$  einen stabilen Grundzustand auf,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{0,\text{KG}}(\phi, \partial_\mu \phi) + g\phi^4.$$

Die Quantenelektrodynamik (QED) beschreibt die Dynamik von Leptonen (hier  $e^\pm$ ) und Photonen unter ihrer gegenseitigen Wechselwirkung. Wir verwenden im Folgenden als Einheit der Ladung  $q = e$ , wobei Elektronen die Ladung  $e = -|e|$  besitzen. Der Quantenelektrodynamik liegt die folgende Lagrangedichte zugrunde,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0,\text{D}}(\underline{\psi}) + \mathcal{L}_{0,\text{M}}(\hat{A}^\mu) + \mathcal{L}_I(\underline{\psi}, \hat{A}^\mu) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_I = -e : \bar{\psi} \gamma^\mu \underline{\psi} \hat{A}_\mu : .$$

Mit der entsprechenden Legendre-Transformation ergibt sich hieraus die Hamiltondichte bzw. der Hamiltonoperator

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{H} &= \mathcal{H}_{0,\text{D}} + \mathcal{H}_{0,\text{M}} + \mathcal{H}_I \quad \text{wobei} \quad \mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = e : \bar{\psi} \gamma^\mu \underline{\psi} : \hat{A}_\mu, \\ &: \hat{H} := \int d^3 \vec{x} : \mathcal{H}(\vec{x}, t) : . \end{aligned}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass  $\mathcal{H}$  auch unmittelbar aus  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{0,D} + \mathcal{H}_{0,M}$  folgt, indem wir die schon früher diskutierte Minimalsubstitution

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{e}{c} \hat{A}^\mu$$

verwenden. Da der Viererstrom eine Erhaltungsgröße ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} : \hat{H} : = 0.$$

Vorwegnehmend sei angemerkt, dass im Rahmen der störungstheoretischen Berechnung sogenannte Loop-Integrale auftreten, welche divergente Anteile besitzen. Ziel der Renormierungstheorie ist, diese Divergenzen durch Renormierung der Ladung und der Masse des Leptons zu eliminieren. Bei diesem Vorgehen startet man zunächst mit der „nackten“ Ladung  $e_0$  in  $: \hat{H} :$  und mit der „nackten“ Masse  $m_0$  im Dirac-Propagator. Diese nackten Größen unterscheiden sich von den physikalisch beobachtbaren Werten  $e$  und  $m$  gerade durch die auftretenden divergenten Terme. Siehe hierzu den späteren Abschnitt zur Renormierungstheorie.

**Bewegungsgleichung der Feldoperatoren:** Da die Feldoperatoren zeitabhängig sind, befinden wir uns im Heisenbergbild. Die Feldoperatoren genügen somit den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} i \dot{\hat{\psi}}(\vec{x}, t) &= \left[ \hat{\psi}(\vec{x}, t), : \hat{H} : \right], \\ i \dot{\hat{A}}_\mu(\vec{x}, t) &= \left[ \hat{A}_\mu(\vec{x}, t), : \hat{H} : \right]. \end{aligned}$$

Die formalen Lösungen lauten

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\vec{x}, t) &= e^{i:\hat{H}:t} \hat{\psi}(\vec{x}, 0) e^{-i:\hat{H}:t}, \\ \hat{A}_\mu(\vec{x}, t) &= e^{i:\hat{H}:t} \hat{A}_\mu(\vec{x}, 0) e^{-i:\hat{H}:t}. \end{aligned}$$

**Modenzerlegung:** Die noch unbekannt Zeitabhängigkeit der Feldoperatoren stecken wir in die Entwicklungskoeffizienten bzw. in die diesen entsprechenden Operatoren

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\vec{x}, t) &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{\omega_{\vec{p}}}} \left[ b(\vec{p}, s; t) \underline{u}(\vec{p}, s) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d^\dagger(\vec{p}, s; t) \underline{v}(\vec{p}, s) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right], \\ \overline{\psi}(\vec{x}, t) &= \dots \dots \dots \text{entsprechend}, \\ \hat{A}^\mu(\vec{x}, t) &= \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \varepsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \frac{1}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \left[ a(\vec{k}, \lambda; t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda; t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned}$$

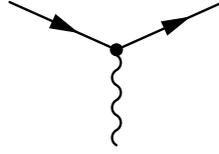


Abbildung 4.1: Diagramm der Elementarprozesse. Die verschiedenen Elementarprozesse ergeben sich, indem wir die Zeitachse von links nach rechts, von rechts nach links, von unten nach oben und von oben nach unten wählen.

Hiermit erhält der Wechselwirkungsoperator die Gestalt

$$\begin{aligned}
 : \hat{H}_I : = e \sum_{s,s',\lambda} \int d^3\vec{p} \int d^3\vec{p}' \int d^3\vec{k} \left[ \right. & \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{p}') b^\dagger(\vec{p}, s; t) b(\vec{p}', s'; t) a(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} + \vec{k} - \vec{p}') b^\dagger(\vec{p}, s; t) b(\vec{p}', s'; t) a^\dagger(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} - \vec{k} - \vec{p}') d^\dagger(\vec{p}, s; t) d(\vec{p}', s'; t) a(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} + \vec{k} - \vec{p}') d^\dagger(\vec{p}, s; t) d(\vec{p}', s'; t) a^\dagger(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} - \vec{k} + \vec{p}') b^\dagger(\vec{p}, s; t) d^\dagger(\vec{p}', s'; t) a(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} + \vec{k} + \vec{p}') b^\dagger(\vec{p}, s; t) d^\dagger(\vec{p}', s'; t) a^\dagger(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} + \vec{k} + \vec{p}') b(\vec{p}, s; t) d(\vec{p}', s'; t) a(\vec{k}, \lambda; t) \\
 & \left. + \otimes \cdot \delta^3(\vec{p} + \vec{k} + \vec{p}') b(\vec{p}, s; t) d(\vec{p}', s'; t) a^\dagger(\vec{k}, \lambda; t) \right].
 \end{aligned}$$

Hierbei steht das Symbol  $\otimes$  für das Skalarprodukt der Spinoren und für andere Faktoren. Die Wechselwirkung  $: H_I :$  beschreibt, wie in Abb. 4.1 erläutert, vier unterschiedliche Elementarprozesse:

- (1) und (2): Elektron–Streuung durch Emission/Absorption eines Photons
- (3) und (4): Positron–Streuung durch Emission/Absorption eines Photons
- (5) und (6): Elektron–Positron–Paarerzeugung durch Vernichtung eines  $\gamma$
- (7) und (8): Erzeugung eines  $\gamma$  durch Elektron–Positron–Paarvernichtung

### 4.1.2 Das Wechselwirkungsbild

Im Wechselwirkungsbild entwickeln sich die Operatoren in der Zeit gemäß dem Hamiltonoperator  $\hat{H}_0$  und die Zustände gemäß der Wechselwirkung  $\hat{H}_I$ . Die zeitliche Entwicklung von Erwartungswerten einer Observablen  $O$  ist somit durch den Ausdruck

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \Phi(t) | \hat{O}(t) | \Phi(t) \rangle$$

gegeben. Die Zeitabhängigkeit des Operators  $\hat{O}(t)$  folgt aus der Lösung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}(t) = [\hat{O}(t), : \hat{H}_0 :] .$$

Dieses Problem haben wir in den vorhergehenden Kapiteln für die verschiedenen Fälle bereits gelöst. Zu behandeln ist somit noch die zeitliche Entwicklung der Zustände unter der Lepton–Photon–Wechselwirkung,

$$|\Phi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Phi(t_0)\rangle .$$

Hierbei stellt  $\hat{U}(t, t_0)$  den Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild dar. Der Zeitentwicklungsoperator genügt der Differentialgleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t, t_0) = : \hat{H}_I(t) : \hat{U}(t, t_0) , \quad (4.1)$$

und unterliegt der Anfangsbedingung

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}} .$$

Die Differentialgleichung (4.1) lässt sich in eine Integralgleichung überführen,

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} - i \int_{t_0}^t dt' : \hat{H}_I(t') : \hat{U}(t', t_0) ,$$

die im Rahmen der störungstheoretischen Behandlung durch Iteration gelöst wird. Mit dem Ansatz  $\hat{U}(t, t_0) = \hat{\mathbb{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n(t, t_0)$  erhält man

$$\hat{U}_n(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t dt' : \hat{H}_I(t') : \hat{U}_{n-1}(t', t_0) .$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{\mathbb{1}} - i \int_{t_0}^t dt' : \hat{H}_I(t') : + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' : \hat{H}_I(t') : : \hat{H}_I(t'') : + \dots \\ &= \hat{\mathbb{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T \left( : \hat{H}_I(t_1) : \dots : \hat{H}_I(t_n) : \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$= \hat{\mathbb{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T \left( : \hat{H}_I(t_1) : \dots : \hat{H}_I(t_n) : \right) \quad (4.3)$$

$$= T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' : \hat{H}_I(t') : \right\} . \quad (4.4)$$

Zur Herleitung wurde verwendet, dass für verschiedene Zeiten,  $t_1 \neq t_2$ , der Kommutator

$$[: \hat{H}_I(t_1) :, : \hat{H}_I(t_2) :] \neq 0$$

nicht verschwindet und dass der durch Iteration gewonnene Ausdruck des Zeitentwicklungsoperators  $\hat{U}$  in natürlicher Weise zeitgeordnet ist. Somit gilt

$$: \hat{H}_I(t_1) :: \hat{H}_I(t_2) : \dots : \hat{H}_I(t_n) : \Big|_{t_1 > t_2 > \dots > t_n} = T \left( : \hat{H}_I(t_1) :: \hat{H}_I(t_2) : \dots : \hat{H}_I(t_n) : \right) .$$

Das zeitgeordnete Produkt ist symmetrisch bezgl. aller Zeiten  $t_1 \dots t_n$ . Es gilt also z.B.

$$\begin{aligned} T \left( : \hat{H}_I(t_1) :: \hat{H}_I(t_2) : \right) &= \Theta(t_1 - t_2) : \hat{H}_I(t_1) :: \hat{H}_I(t_2) : \\ &\quad + \Theta(t_2 - t_1) : \hat{H}_I(t_2) :: \hat{H}_I(t_1) : \\ &= T \left( : \hat{H}_I(t_2) :: \hat{H}_I(t_1) : \right) . \end{aligned}$$

Daher lassen sich die Integrationen in (4.2) bezüglich aller Zeiten symmetrisieren, woraus die Umformung gemäß (4.3) folgt. Ein einfaches Beispiel soll dies erläutern. Gegeben sei eine bezgl. ihrer beiden Argumente symmetrische Funktion  $g(t_1, t_2)$ , d.h. es gelte

$$g(t_1, t_2) = g(t_2, t_1) .$$

Dann lassen sich die nachstehenden Integrationen, wie in Abbildung 4.2 veranschaulicht ist, ebenfalls symmetrisieren.

$$\underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2}_{\text{Gebiet } A_2} g(t_1, t_2) = \underbrace{\int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1}_{\text{Gebiet } A_1} g(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2}_{=A_1 \cup A_2} g(t_1, t_2) .$$

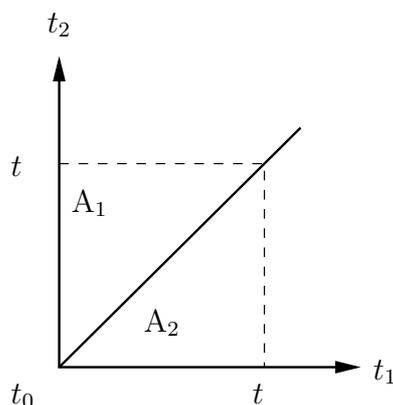


Abbildung 4.2: Integrationsgebiete  $A_1$  und  $A_2$ .

Im allgemeinen Fall einer  $n$ -fachen Integration über einen in allen  $n$  Argumenten symmetrischen Integranden ist der Faktor vor dem symmetrisierten Integral durch den Faktor  $1/n!$  zu ersetzen. Auf diese Weise erhalten wir schließlich den Ausdruck (4.4).

## 4.2 Die S–Matrix

Anfangs- und Endzustände bei Streuexperimenten sind freie Zustände und somit im Wechselwirkungsbild völlig zeitunabhängig. Betrachtet man z.B. zwei freie Elektronen im Anfangszustand, so lässt sich der sie bestimmende freie Zustand ( $i$ : initial) folgendermaßen darstellen,

$$|\phi_i\rangle = \left| \vec{k}_1, s_1 \right\rangle \left| \vec{k}_2, s_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} b^\dagger(\vec{k}_1, s_1) b^\dagger(\vec{k}_2, s_2) |0\rangle .$$

Die Evolution dieses Zustands unter Einfluss der Wechselwirkung lässt sich mit dem Zeitentwicklungsoperators beschreiben. Wenn der freie Anfangszustand zur Zeit  $t \rightarrow -\infty$  vorliegt wird, dann gilt

$$\left| \Phi_i^{(+)}(t) \right\rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \hat{U}(t, t_0) |\phi_i\rangle .$$

Analog hierzu ist der Endzustand ( $f$ : final) des Streuexperiments  $|\phi_f\rangle$ , welcher durch die vorgegebene Zähleranordnung festgelegt ist, wiederum ein freier Zustand. Das  $S$ –Matrixelement  $S_{fi}$  ist die Übergangsamplitude zu einer beliebigen Zeit  $t$  zwischen dem wechselwirkenden Zustand  $\left| \Phi_i^{(+)}(t) \right\rangle$ , der sich aus dem freien Anfangszustand  $|\phi_i\rangle$  entwickelt hat, und dem wechselwirkenden Zustand  $\left| \Phi_f^{(-)}(t) \right\rangle$ , welcher sich in der (unendlichen) Zukunft in den freien, gemessenen Endzustand  $|\phi_f\rangle$  entwickelt haben wird. Es ist

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \Phi_f^{(-)}(t) | \Phi_i^{(+)}(t) \rangle = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow +\infty \\ t_2 \rightarrow -\infty}} \langle \phi_f | \hat{U}(t_1, t) \hat{U}(t, t_2) | \phi_i \rangle \\ &= \langle \phi_f | \hat{U}(\infty, -\infty) | \phi_i \rangle = \langle \phi_f | S | \phi_i \rangle . \end{aligned}$$

Somit fällt die beliebige Zeit  $t$  im Ausdruck für  $S_{fi}$  heraus. Der  $S$ –Operator ist formal durch den Ausdruck

$$S = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \hat{H}_1(t') \right\}$$

gegeben. Anmerkung: Die genaue Untersuchung der Limesbildung  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty}$  ist mathematisch anspruchsvoll und fortwährender Forschungsgegenstand der Mathematischen Physik.

Der  $S$ –Operator beinhaltet sämtliche Wechselwirkungsprozesse der zugrunde liegenden Feldtheorie (z.B. QED). Die Spezialisierung auf einen ganz bestimmten Prozess (beispielsweise  $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ ) erfolgt allein durch die Wahl der Anfangs- und Endzustände. Ein weiteres Beispiel ist der Stoßprozess

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma , \quad (i)$$

welcher durch das  $S$ –Matrixelement

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | a(\vec{k}_1, \lambda_1) a(\vec{k}_2, \lambda_2) S b^\dagger(\vec{p}_1, s_1) d^\dagger(\vec{p}_2, s_2) | 0 \rangle}$$

gegeben ist. Zur Auswertung dieses Ausdrucks verfolgt man die folgende Strategie:

1. Schritt: Entwicklung von  $S$  nach Potenzen von  $\mathcal{H}_I$  (Störungstheorie)
2. Schritt: Umwandlung des zeitgeordneten Produktes von Feldoperatoren in ein normalgeordnetes Produkt (Wicksches Theorem)

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n} \sum_{\vec{p}', s', \vec{p}'', s'', \dots} f_n(\vec{p}', s'; \vec{p}'', s''; \vec{k}', \lambda'; \vec{k}'', \lambda'') a^\dagger(\vec{k}', \lambda') a^\dagger(\vec{k}'', \lambda'') b(\vec{p}', s') d(\vec{p}'', s'')$$

+ alle anderen normalgeordneten Terme (diese tragen zum Prozess ( $i$ ) nicht bei)

### 4.3 Das Wicksche Theorem

Vermöge des Wickschen Theorems lässt sich ein zeitgeordnetes Produkt von Feldoperatoren in ein normalgeordnetes Produkt umwandeln. Hierzu führen wir zunächst den Begriff der Kontraktion (Symbol:  $\underbrace{\phi(x) \dots \phi(x') \dots}$ ) ein:

$$\begin{aligned} \underbrace{\phi(x) \phi(x')} &\equiv \langle 0 | T(\phi(x) \phi(x')) | 0 \rangle = i\Delta_F(x - x'), \\ \underbrace{A_\mu(x) A_\nu(x')} &\equiv \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(x')) | 0 \rangle = iD_{F,\mu\nu}(x - x'), \\ \underbrace{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')} &\equiv \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle = iS_{F,\alpha\beta}(x - x'). \end{aligned}$$

**Illustration am Beispiel des Boson-Feldes  $A_\mu(x)$ :**

Der Fall  $n=1$ :  $T(A_\mu(x)) = : A_\mu(x) :$

Der Fall  $n=2$ :  $T(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)) = : A_\mu(x_1)A_\nu(x_2) : + \underbrace{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)}$

Man erkennt die Äquivalenz, wenn man hiervon den Vakuumerwartungswert bildet und beachtet, dass

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad \text{und} \quad \langle 0| : \dots : |0\rangle = 0.$$

Der Fall  $n = 3$ : (ohne Beweis)

$$\begin{aligned}
 T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3)) &= : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) : \\
 &\quad + : \underbrace{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} : A_\rho(x_3) : \\
 &\quad + : A_\mu(x_1) \underbrace{A_\nu(x_2) A_\rho(x_3)} : : \\
 &\quad + : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \underbrace{A_\rho(x_3)} : : \\
 &= : A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) A_\rho(x_3) : \\
 &\quad + \langle 0 | T(A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)) | 0 \rangle : A_\rho(x_3) : \\
 &\quad + \langle 0 | T(A_\mu(x_1) A_\rho(x_3)) | 0 \rangle : A_\nu(x_2) : \\
 &\quad + \langle 0 | T(A_\nu(x_2) A_\rho(x_3)) | 0 \rangle : A_\mu(x_1) : .
 \end{aligned}$$

Der Fall  $n = 4$ : (symbolisch)

$$\begin{aligned}
 T(ABCD) &= : ABCD : \\
 &\quad + \underbrace{AB} : CD : + \underbrace{AC} : BD : + \underbrace{AD} : BC : \\
 &\quad + \underbrace{BC} : AD : + \underbrace{BD} : AC : + \underbrace{CD} : AB : \\
 &\quad + \underbrace{AB} \underbrace{CD} \quad + \underbrace{AC} \underbrace{BD} \quad + \underbrace{AD} \underbrace{BC} \\
 &\quad + \underbrace{BC} \underbrace{AD} \quad + \underbrace{BD} \underbrace{AC} \quad + \underbrace{CD} \underbrace{AB} .
 \end{aligned}$$

allgemein:

$$\begin{aligned}
 \text{Zeitgeordnetes Produkt} &= \text{Normalgeordn. Produkt (N.P.)} \\
 &\quad + \text{alle 1-fach kontrahierten N.P.} \\
 &\quad + \text{alle 2-fach kontrahierten N.P.} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

**Fazit:** Das Wicksche Theorem ermöglicht es, den  $S$ -Operator in eine normalgeordnete Form zu bringen.

**Beispiel:** Wir betrachten in 2.Ordnung in  $\mathcal{H}_1$  den QED-Prozess

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma .$$

In diesem Fall haben wir

$$\begin{aligned}
 |\Phi_i\rangle &= b^\dagger(\vec{p}_1, s_1) d^\dagger(\vec{p}_2, s_2) |0\rangle , \\
 \langle \Phi_f| &= \langle 0| a(\vec{k}_1, \lambda_1) a(\vec{k}_2, \lambda_2) , \\
 S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x \int d^4x' \langle \Phi_f| S^{(2)} |\Phi_i\rangle ,
 \end{aligned}$$

mit

$$S^{(2)} = T(\mathcal{H}_I(x) \mathcal{H}_I(x'))$$

und

$$\mathcal{H}_I(x) = e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) : A_\mu(x) .$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung des Wick'schen Theorems

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & e^2 : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) A_\mu(x) \bar{\psi}(x') \gamma^\nu \underline{\psi}(x') A_\nu(x') : \\ & + e^2 : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) A_\mu(x) \bar{\psi}(x') \gamma^\nu \underline{\psi}(x') A_\nu(x') : \\ & + \text{alle weiteren Kontraktionen, die jedoch für die gegebenen Anfangs-} \\ & \text{und Endzustände keinen Beitrag liefern.} \end{aligned}$$

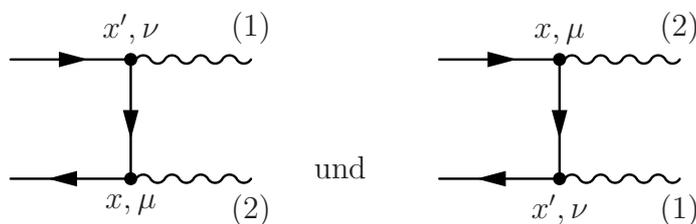


Abbildung 4.3: Feynman–Diagramme der zu  $S_{fi}^{(2)}$  beitragenden Prozesse

## 4.4 Störungstheorie in der Quantenelektrodynamik

### 4.4.1 Regeln für die Feynman–Diagramme

#### 1. Wirkungsquerschnitt und invariante Amplitude $M_{fi} \sim S_{fi}$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Stoßprozess zweier einfallender Teilchen, aus welchem  $N$  auslaufende Teilchen resultieren, hängt mit der invarianten Amplitude  $M$  dieses Erzeugungsprozesses wie folgt zusammen (siehe zugehöriges symbolisches Diagramm in Abb. 4.4):

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} n(\vec{p}_1) n(\vec{p}_2) \prod_{i=1}^N \left\{ n(\vec{k}_i) \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3} \right\} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4 \left( p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^N k_i \right) \Gamma |M|^2 . \end{aligned}$$

Hierzu werden die folgenden Erläuterungen gegeben:

a.)  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  sind die Geschwindigkeiten der kollinear einfallenden Teilchen

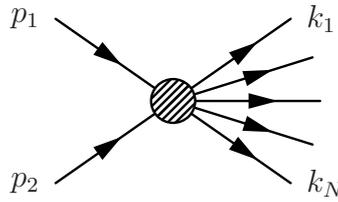


Abbildung 4.4: Diagramm des Stoßprozesses mit  $N$  Teilchen im Endzustand

b.)

$$n(\vec{k}) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_{\vec{k}}} & \text{für Bosonen} \\ \frac{m}{\omega_{\vec{k}}} & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$$

c.)  $\Gamma$  ist ein statistischer Faktor. Im Fall  $n$  identischer Teilchen im Endzustand ist  $\Gamma = \frac{1}{n!}$

d.) Über die Endimpulse nicht beobachteter Teilchen ist zu integrieren

e.) Über die nicht festgelegten Quantenzahlen der Anfangszustände wird gemittelt, über nicht gemessene Quantenzahlen im Endzustand wird summiert

## 2. Feynman-Regeln für die invariante Amplitude in der Impulsdarstellung

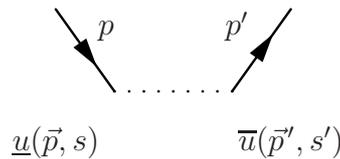


Abbildung 4.5: Elektron im Anfangszustand, Elektron im Endzustand

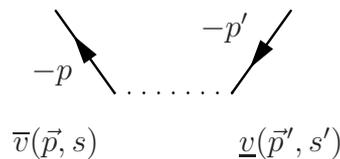


Abbildung 4.6: Positron im Anfangszustand, Positron im Endzustand

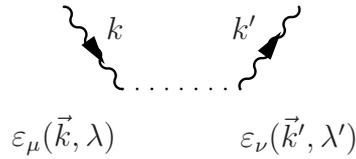


Abbildung 4.7: Photon im Anfangszustand, Photon im Endzustand

1. Anfangs- und Endzustände: Lesrichtung:  $\longrightarrow$

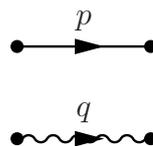
Die äußeren Zustände sind stets physikalische on-shell-Zustände, d.h. die einzelnen Viererimpulse der Teilchen liegen auf der Massenschale. Die Feynman-Symbole und die entsprechenden Faktoren sind in den Abbildungen 4.5, 4.6 und 4.7 dargestellt. Der Vierer-Polarisationsvektor  $\varepsilon_\mu$  in Abb. 4.7 beschreibt die Polarisation von Photonen in den äußeren Zuständen. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu &= -1, \\ \varepsilon_\mu k^\mu &= 0, & (\text{Transversalität des Strahlungsfeldes}) \\ k_\mu k^\mu &= 0. & (\text{Masselosigkeit des Photons}) \end{aligned}$$

In jedem speziellen Bezugssystem kann  $\varepsilon_\mu$  stets rein raumartig gewählt werden,

$$\varepsilon^\mu = (0, \vec{\varepsilon}), \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0, \quad \leftrightarrow \quad \text{Strahlungseichung.}$$

2. Innere Linien:



$$i S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1} + i0^+}$$

$$i D_{F,\mu\nu}(q) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 + i0^+}$$

3. Vertex:

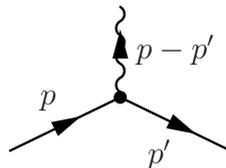


Abbildung 4.8: Vertex mit trilinearer Kopplung

a.) Viererimpulserhaltung am Vertex

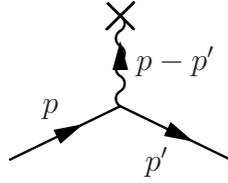


Abbildung 4.9: Wechselwirkung mit äußerem Feld

b.) Faktor  $-ie\gamma^\mu$  (Der Index  $\mu$  wird noch mit dem Propagator kontrahiert!)

4. Wechselwirkung mit einem äußeren Feld:

$$\text{Faktor} \quad -ie\gamma_\mu A_{\text{ext}}^\mu(p-p'),$$

wobei

$$A_{\text{ext}}^\mu(p-p') = \int d^4x A_{\text{ext}}^\mu(x) e^{-i(p-p')_\nu x^\nu}$$

5. Für jeden inneren geschlossenen Ring (Loop)  $\Rightarrow \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \dots$

6. Für jeden geschlossenen Fermionen-Loop ein Faktor  $-1$  (Pauli-Prinzip!).

**Beispiel:**  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  in Ordnung  $e^4$

Wir wollen nun an einem Loop-Diagramm, welches zur  $e^+e^-$ -Streuung in Ordnung  $e^4$  beiträgt, die Feynman-Regeln veranschaulichen.

Folgendes ist zu beachten:

- Gesamt-Viererimpulserhaltung

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$$

- Zwei durchlaufende Fermionzüge
- Absättigung der Spinorindizes innerhalb eines Fermionzuges

Dem Feynman-Diagramm der Abbildung 4.10 entspricht der folgende mathematische Ausdruck:

$$M = (-ie)^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\mu}}{(p_1 - q)^2 + i0^+} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{(q + p_2)^2 + i0^+} \\ \times \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\rho \frac{i}{\not{q} - m\mathbb{1} + i0^+} \gamma^\nu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \\ \times \bar{u}(\vec{p}'_1, s'_1) \gamma^\sigma \frac{i}{\not{p}'_1 - \not{q} - \not{p}_2 - m\mathbb{1} + i0^+} \gamma^\mu \underline{v}(\vec{p}'_2, s'_2)$$

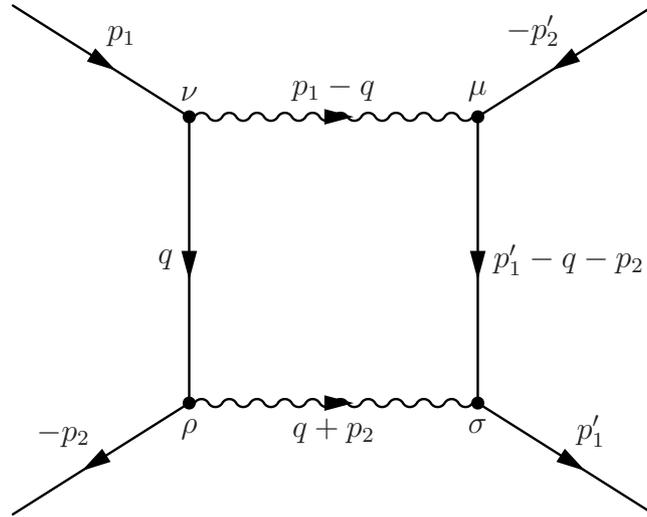
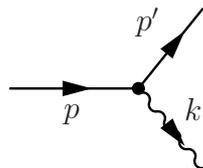


Abbildung 4.10: Dieses Loop-Diagramm ist eines von insgesamt 18 möglichen Diagrammen für den Prozess  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  in Ordnung  $e^4$ .

### 4.4.2 Elementare Tree-Diagramme

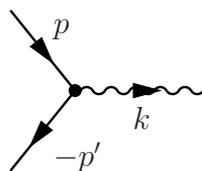
a.)  $e^- \rightarrow e^- + \gamma$  virtueller Prozess



$$M_{fi}^{(1)} = -ie \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}', s') \gamma^\mu \underline{u}(\vec{p}, s)$$

Die spontane Emission eines Photons von einem on-shell Elektron ist ein virtueller Prozess, da bei diesem Streuprozess wegen der Gesamtviererimpulserhaltung am Vertex entweder das gestreute Elektron oder das emittierte Photon off-shell geht.

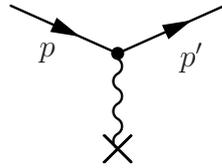
b.)  $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$  virtueller Prozess



$$M_{fi}^{(1)} = -ie \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \bar{v}(\vec{p}, s') \gamma^\mu \underline{u}(\vec{p}, s)$$

Dies ist ebenfalls ein virtueller Prozess, da wegen der Viererimpulserhaltung am Vertex eines der drei beteiligten Teilchen off-shell sein muss.

c.) Streuung an einem äußeren Potenzial (Mott-Streuung)



$$M_{fi}^{(1)} = -ie A_{\text{ext}}^\mu(p - p') \bar{u}(\vec{p}', s') \gamma_\mu u(\vec{p}, s)$$

Das statische Coulombpotential eines Kerns der Ladung  $Ze$  liefert den Ausdruck

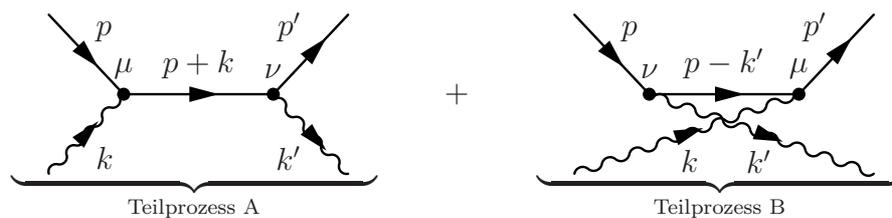
$$A_{\text{ext}}^\mu(p - p') = g^{\mu 0} \delta(\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{p}'}) \frac{Ze}{(\vec{p} - \vec{p}')^2}.$$

In nichtrelativistischen Näherung reduziert sich die Mott-Streuung auf die Rutherford-Streuung.

**Bemerkung:** Während a) und b) virtuelle Prozesse sind, stellt c) einen realen Prozess dar, da das Elektron vor und nach dem Stoß on-shell sein kann. Der entsprechend Viereimpulsübertrag  $q^\mu = p'^\mu - p^\mu$  wird von dem äußeren Potential vermittelt.

## 4.5 Prozesse in 2. Ordnung

### 4.5.1 Compton-Streuung: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$



Im Teilprozess A erfolgt zunächst die Absorption und dann die Emission eines Photons. Im Teilprozess B wird zunächst ein Photon emittiert und danach eines absorbiert.

$$A = (-ie)^2 \varepsilon_\nu(\vec{k}', \lambda') \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}', s') \gamma^\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m\mathbb{1}} \gamma^\mu u(\vec{p}, s),$$

$$B = (-ie)^2 \varepsilon_\nu(\vec{k}', \lambda') \varepsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \bar{u}(\vec{p}', s') \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}' - m\mathbb{1}} \gamma^\nu u(\vec{p}, s),$$

$$M_{\text{Compton}}^{(2)} = A + B.$$

Man hat sich zur Interpretation der Feynman-Diagramme (Störungstheorie) eine gewisse Sprechweise angewöhnt:

Zu A: Das Elektron im Anfangszustand absorbiert ein Photon und wird dadurch virtuell bzw. off-shell. Für den off-shell Zwischenzustand gilt

$$(p + k)^2 \neq m^2.$$

Erst nach Emission eines Photons geht es wieder in einen physikalischen on-shell Zustand über.

Zu B: Das reelle Elektron im Anfangszustand nimmt nach Emission eines reellen Photons zunächst einen virtuellen off-shell Zustand ein. Nach Absorption eines reellen Photons wird das virtuelle Elektron wieder on-shell, d.h. wieder ein reelles Elektron.

### 4.5.2 Bremsstrahlung

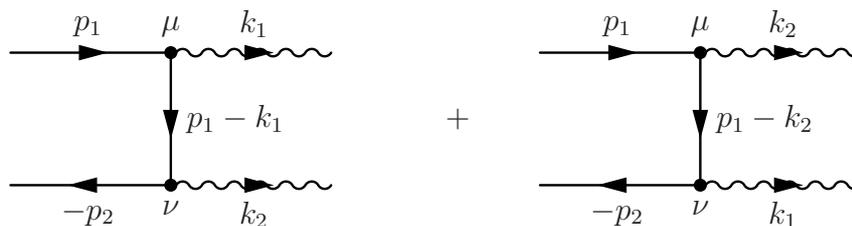
Unter Bremsstrahlung versteht man den Prozess, bei dem ein Elektron im elektromagnetischen Feld  $A_{\text{ext}}^\mu$  eines Kernes abgelenkt wird und dabei ein Photon ausstrahlt. Das äußere Potential liefert den erforderlichen Viererimpulsübertrag, sodass die Impulse der äußeren Teilchenzustände on-shell sind.

Zur Bremsstrahlung in 2. Ordnung tragen die beiden folgenden Feynman-Diagramme bei:



$$M_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \varepsilon^\mu(\vec{k}', \lambda') A_{\text{ext}}^\nu(p - p' - k') \times \bar{u}(\vec{p}', s') \left[ \gamma_\mu \frac{i}{\not{p}' + \not{k}' - m\mathbb{1}} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k}' - m\mathbb{1}} \gamma_\mu \right] u(\vec{p}, s).$$

### 4.5.3 $e^+ + e^-$ -Vernichtung in zwei $\gamma$

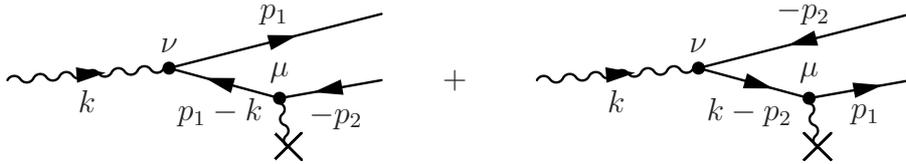


$$M_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \left[ \varepsilon_\mu(\vec{k}_1, \lambda_1) \varepsilon_\nu(\vec{k}_2, \lambda_2) \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_1 - m\mathbb{1}} \gamma^\mu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \right. \\ \left. + \varepsilon_\mu(\vec{k}_2, \lambda_2) \varepsilon_\nu(\vec{k}_1, \lambda_1) \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\nu \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k}_2 - m\mathbb{1}} \gamma^\mu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \right].$$

Wie es die Bose-Statistik verlangt, ergibt sich die Amplitude  $M_{fi}^{(2)}$  als symmetrisch unter Vertauschung der beiden Photonen.

#### 4.5.4 Paarerzeugung im Coulombpotenzial

Trifft ein  $\gamma$ -Quant ausreichender Energie ( $\omega_{\vec{k}} > 2m$ ) auf Materie, dann kann ein  $e^+ e^-$ -Paar erzeugt werden. In 2. Ordnung besteht dieser Prozess aus den folgenden Beiträgen:



$$M_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \bar{u}(\vec{p}_1, s_1) \left[ \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}_1 - \not{k} - m\mathbb{1}} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - \not{p}_2 - m\mathbb{1}} \gamma_\nu \right] \underline{v}(\vec{p}_2, s_2) \\ \times \varepsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) A_{\text{ext}}^\mu(k - p_1 - p_2).$$

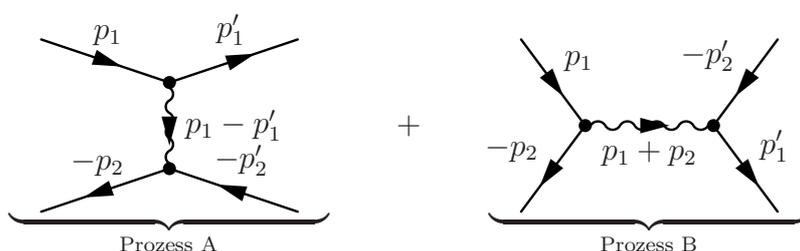
#### 4.5.5 Møller-Streuung ( $e^- + e^-$ -Streuung)



$$M_{\text{Møller}}^{(2)} = (-ie)^2 \left[ \bar{u}(\vec{p}_1', s_1') \gamma_\mu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_1')^2} \bar{u}(\vec{p}_2', s_2') \gamma_\nu \underline{u}(\vec{p}_2, s_2) \right. \\ \left. - \bar{u}(\vec{p}_2', s_2') \gamma_\mu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_2')^2} \bar{u}(\vec{p}_1', s_1') \gamma_\nu \underline{u}(\vec{p}_2, s_2) \right].$$

Das erste Diagramm beschreibt die direkte Streuung, welche in Vorwärtsrichtung maximal ist. Das zweite Diagramm beschreibt die Austauschstreuung, welche in Rückwärtsrichtung maximal ist. Beide Diagramme zusammen ergeben einen differentiellen Wirkungsquerschnitt, welcher symmetrisch um den Streuwinkel  $\theta = 90^\circ$  ist. In beiden Diagrammen ist das ausgetauschte virtuelle Photon raumartig, d.h. es ist  $q_\mu q^\mu < 0$ . Der relative Faktor  $-1$  der beiden Beiträge resultiert aus dem Fermion-Charakter der beiden identischen Teilchen im Endzustand.

#### 4.5.6 Bhabha-Streuung ( $e^+ + e^-$ -Streuung)



##### Merkmale der Prozesse:

- A:
- raumartiges Photon
  - starke Winkelabhängigkeit
- B:
- zeitartiges Photon
  - schwache Winkelabhängigkeit (nur von Spinoren)

$$A = (-ie)^2 \bar{u}(\vec{p}'_1, s'_1) \gamma_\mu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p'_1)^2} \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma_\nu \underline{v}(\vec{p}'_2, s'_2) ,$$

$$B = (-ie)^2 \bar{v}(-\vec{p}_2, s_2) \gamma_\mu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(\vec{p}'_1, s'_1) \gamma_\nu \underline{v}(\vec{p}'_2, s'_2) ,$$

$$M_{\text{Bhabha}}^{(2)} = A + B .$$

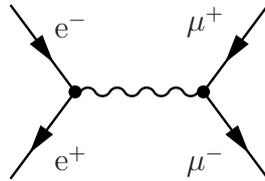
#### 4.5.7 $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

Die Muonen koppeln an das Photon in gleicher Weise wie Elektron/Positron. Somit lautet der Lagrangian

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0, \text{Elektron/Positron}} + \mathcal{L}_{0, \text{Muon}} - eA_\nu j_{\text{Elektron/Positron}}^\nu - eA_\nu j_{\text{Muon}}^\nu .$$

Der wesentliche Unterschied zur Bhabha-Streuung ist, dass das erste Diagramm (raumartiges Photon) fehlt, da der dafür notwendige Elementarprozess des direkten Übergangs

$e^\pm \rightarrow \mu^\pm$  durch Absorption bzw. Emission eines Photons nicht existiert. Das verbleibende Diagramm, in welchem ein zeitartiges Photon ausgetauscht wird, liefert nur eine schwache, von den Spinoren herrührende Winkelabhängigkeit des Prozesses.



$$M_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{(2)} = (-ie)^2 \underbrace{\bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma_\mu u(\vec{p}_1, s_1)}_{e^\pm\text{-Stromdichte}} \frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \underbrace{\bar{u}(\vec{p}_1, s'_1) \gamma_\nu v(\vec{p}_2, s'_2)}_{\mu^\pm\text{-Stromdichte}} .$$

#### 4.5.8 $e^+ + e^- \rightarrow$ Hadronen

Hadronen sind alle Teilchen, welche starke Wechselwirkung zeigen.

**Quark-Hypothese:** Die Hadronen setzen sich aus Quarks zusammen. Mesonen sind gebundene Zustände von zwei Quarks, Baryonen sind gebundene Zustände von drei Quarks. Quarks sind Dirac-Teilchen und koppeln an das Photon genau so wie die Leptonen. Somit ist der *primäre* Quark-Antiquark Erzeugungsprozess völlig analog zur  $\mu^+\mu^-$ -Erzeugung. Die Hadronen entstehen dann in nachfolgenden Sekundärprozessen, welche auf der quantenchromodynamischen Wechselwirkung der Quarks beruhen.

Interessant ist somit die Untersuchung des Verhältnisses der totalen Wirkungsquerschnitte von  $e^+ + e^- \rightarrow$  Hadronen und  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ :

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}^{\text{total}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{\text{total}}} = \frac{\sum_i \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } e^- \text{ and } e^+ \text{ exchange a photon } \gamma \text{ which then splits into } q_i^- \text{ and } q_i^+ \\ \text{Diagram 2: } e^- \text{ and } e^+ \text{ exchange a photon } \gamma \text{ which then splits into } \mu^- \text{ and } \mu^+ \end{array} \right|^2}{\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 2: } e^- \text{ and } e^+ \text{ exchange a photon } \gamma \text{ which then splits into } \mu^- \text{ and } \mu^+ \end{array} \right|^2} = \sum_i \frac{Q_i^2}{e^2}$$

Hierbei sind die  $\{Q_i\}$  die einzelnen Quarkladungen. Die  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -,  $c$ -,  $\dots$ -Quarks unterscheiden sich in ihrer sog. Flavour-Ladung. Das experimentell gemessene  $R$  gibt Hinweise, dass die Quarks neben der Flavour-Ladung auch eine sog. Farb-Ladung besitzen, wobei die zu Grunde liegende Symmetriegruppe die  $SU(3)_{\text{colour}}$ -Gruppe ist.

Im Rahmen der einzelnen Quark-Modelle ergeben sich für  $R$  die folgenden Werte:

$$\underbrace{SU(3)_{\text{flavour}}}_{\text{u, d, s}} \text{ Quark-Modell:} \quad R = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\underbrace{SU(3)_{\text{flavour}}}_{\text{u, d, s}} \times SU(3)_{\text{colour}} \text{ Quark-Modell:} \quad R = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \times 3 = 2$$

$$\underbrace{SU(4)_{\text{flavour}}}_{\text{u, d, s, c}} \times SU(3)_{\text{colour}} \text{ Quark-Modell:} \quad R = \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) \times 3 = \frac{10}{3}$$

Die experimentelle Bestimmung von  $R$  gibt Hinweise auf den Farbfreiheitsgrad der Quarks (hierzu später mehr!).

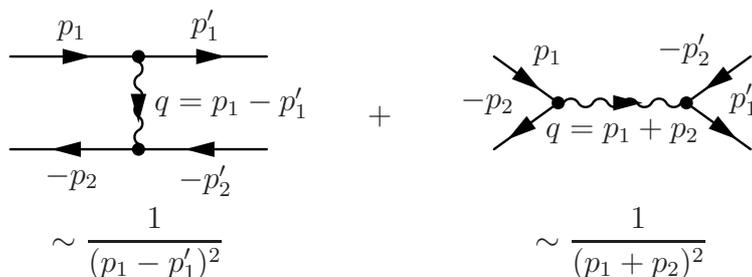
Das experimentell gemessene  $R_{\text{exp}}$  weicht um einen Faktor 3 von dem Wert der reinen  $SU(N)$ -Flavour Modelle ab. Dies ist einer unter mehreren Hinweisen, dass die Quarkdynamik einer  $SU(3)$ -Farbinvarianz unterliegt.

Mit steigender Stoßenergie im Schwerpunktsystem des Elektron-Positron-Paars werden in  $R$  die verschiedenen Flavour-Schwellen (s, c, b, t) sichtbar. Die Schwellenergien liegen mit zunehmender Masse der Flavour-Quarks bei entsprechend höheren Werten.

## 4.6 Bhabha–Streuung in 4. Ordnung

In 4. Ordnung treten UV–divergente Feynman–Diagramme auf. Diese wollen wir klassifizieren.

**Zur Erinnerung: 2. Ordnung** (Lesrichtung jeweils von links nach rechts)



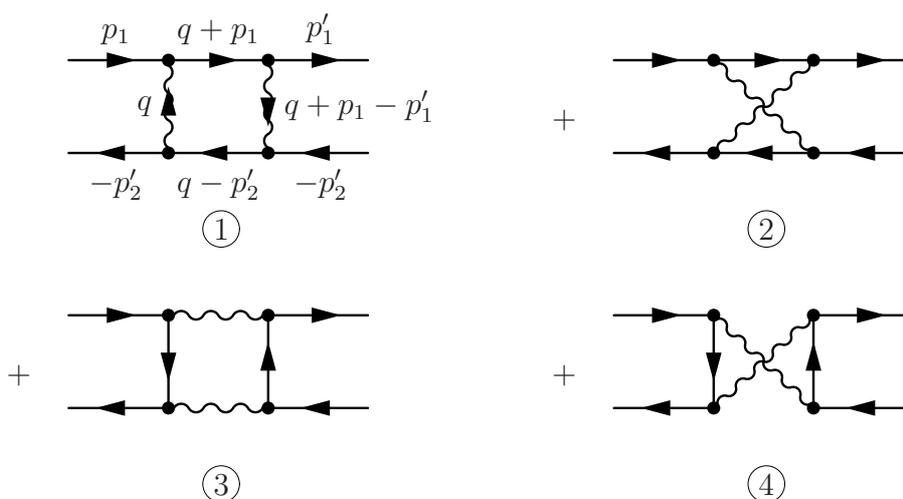
mit  $q^2 = (q^0)^2 - \vec{q}^2$ .

### 4. Ordnung:

In 4. Ordnung setzt sich die invariante Amplitude bereits aus 18 Feynman–Diagrammen zusammen. Diese wollen wir nun skizzieren und einordnen. In 4. Ordnung besitzt jedes einzelne Diagramm einen sogenannten Loop, in welchem ein Viererimpuls umläuft. Das entsprechende 4-dimensionale loop-Integral ist entweder konvergent oder UV-divergent. Wir sortieren nun die 18 Diagramme nach ihrem Konvergenzgrad.

#### 4.6.1 Konvergente Diagramme

Es gibt vier konvergente Diagramme:



Zum Beispiel entspricht das erste Diagramm dem folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= (-ie)^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + i0^+} \frac{1}{(q + p_1 - p'_1)^2 + i0^+} \\
&\quad \times \bar{u}(\vec{p}', s'_1) \gamma_\mu \frac{1}{\not{q} + \not{p}_1 - m\mathbb{1} + i0^+} \gamma_\nu \underline{u}(\vec{p}_1, s_1) \\
&\quad \times \bar{v}(\vec{p}_2, s_2) \gamma^\nu \frac{1}{\not{q} - \not{p}_2 - m\mathbb{1} + i0^+} \gamma^\mu \underline{v}(\vec{p}'_2, s'_2)
\end{aligned}$$

### UV-Konvergenzverhalten des Loop-Integrals

Wick-Rotation:  $q \rightarrow q_E$ , wobei  $q_E$  der euklidische Vierervektor ist, d.h. es gilt  $q_E^2 = q_0^2 + \vec{q}^2$ . Im sog. UV-Limes  $|q_E| \rightarrow \infty$  sind die äußeren Impulse  $p_1, p'_1, p_2, p'_2$  sowie die Massen vernachlässigbar. Somit besitzen die Propagatoren das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned}
\text{Photon-Propagator} &\sim \frac{1}{q^2}, \\
\text{Fermion-Propagator} &\sim \frac{1}{q},
\end{aligned}$$

wobei  $q = |q_E|$ . Das Loop-Integral in  $\textcircled{1}$  wird unter Berücksichtigung der Relation

$$\int d^4q \rightarrow \int d^4q_E \propto \int dq q^3$$

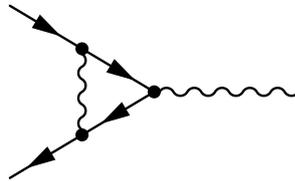
zu (modulo eines aus der Winkelintegration resultierenden Faktors)

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda d^4q_E \frac{1}{q_E} \frac{1}{q_E} \frac{1}{q_E^2} \frac{1}{q_E^2} \sim \int_0^\infty dq \frac{q^3}{q^6} = \int_0^\infty dq \frac{1}{q^3}.$$

Die Diagramme  $\textcircled{1}$  bis  $\textcircled{4}$  sind also alle wohl definiert.

Wegen eines extra Faktors  $\alpha = 1/137$  in 4. Ordnung im Vergleich zu den Termen 2. Ordnung ergeben diese Diagramme eine ungefähr 1%ige Korrektur zur 2. Ordnung. Die 14 restlichen Diagramme sind divergent. Die divergenten Loop-Integrale lassen sich wie folgt klassifizieren:

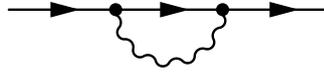
A.) *Strahlungskorrektur des Vertex*



Der aus drei Propagatoren zusammengesetzte Loop beschreibt eine Vertex-Korrektur und besitzt eine logarithmische UV-Divergenz,

$$\int d^4q_E \frac{1}{q_E^2} \frac{1}{q_E} \frac{1}{q_E} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dq \frac{1}{q} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \ln(\Lambda).$$

B.) *Strahlungskorrektur des Leptons* (Selbstenergie-Korrektur des Leptons)

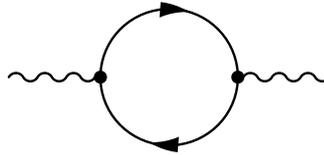


Das Loop-Integral

$$\int d^4 q_E \frac{1}{q_E^2} \frac{1}{q_E} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dq \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda$$

divergiert eigentlich linear mit dem cut-off. Aus Symmetrie-Gründen verschwindet jedoch der linear divergente Beitrag (siehe weiter unten). D.h. die Strahlungskorrektur des Leptons führt ebenfalls zu einer logarithmischen Divergenz.

C.) *Vakuum-Polarisation des Photons*

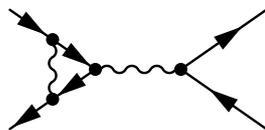


Das Loop-Integral  $\int d^4 q_E \frac{1}{q_E^2} \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dq q$  divergiert quadratisch mit  $\Lambda$ .

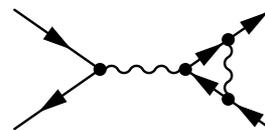
**Beachte:** Die auftretenden UV-Divergenz im Impulsraum resultieren aus der lokalen Kopplung der Felder im Minkowski-Raum.

## 4.6.2 Diagramme mit Strahlungskorrektur des Vertex

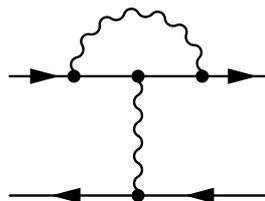
Vier Beiträge



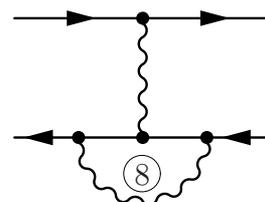
⑤



⑥



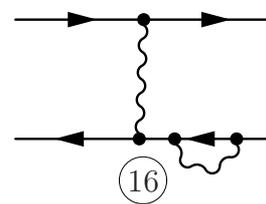
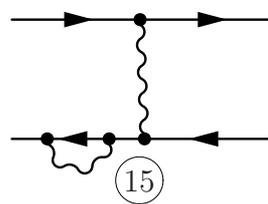
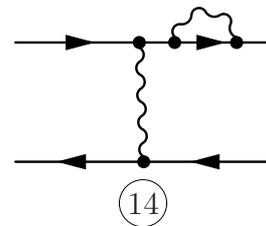
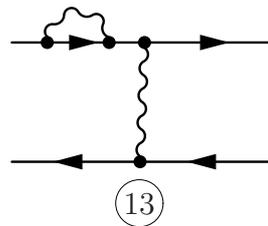
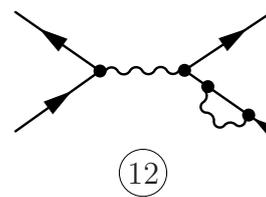
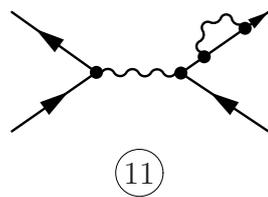
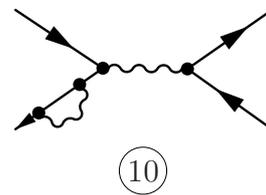
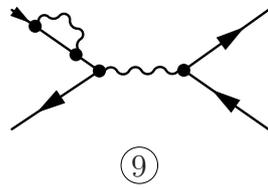
⑦



⑧

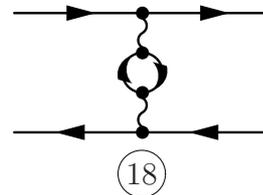
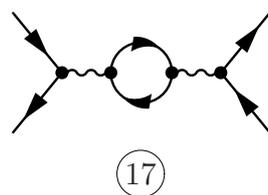
### 4.6.3 Diagramme mit Selbstenergie-Korrektur des Leptons

Acht Beiträge



### 4.6.4 Diagramme mit Vakuum-Polarisation des Photons

Zwei Beiträge

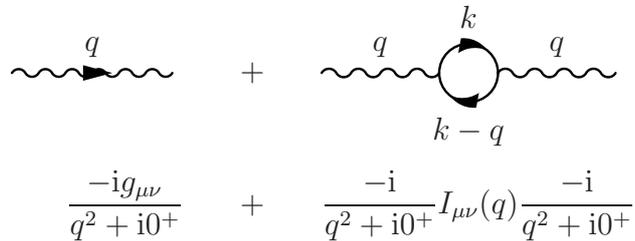


# 5 Grundlagen der Renormierungstheorie

## 5.1 Ein-Loop-Renormierung

### 5.1.1 Vakuum-Polarisation

Photon-Propagator



$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i0^+} + \frac{-i}{q^2 + i0^+} I_{\mu\nu}(q) \frac{-i}{q^2 + i0^+}$$

Der Beitrag der Vakuum-Polarisation in Ordnung  $e^2$  zum Photon-Propagator,

$$I_{\mu\nu}(q, m^2) = -(-ie)^2 \text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - m\mathbb{1} + i0^+} \gamma_\nu \frac{i}{\not{k} - q - m\mathbb{1} + i0^+}, \quad (5.1)$$

ist divergent. In der sog. Pauli-Villars Regularisierung, welche Lorentz- und eichinvariant ist, erfolgt die Renormierung vermöge eines „Counter“-Terms,

$$\bar{I}_{\mu\nu}(q) = I_{\mu\nu}(q, m^2) - I_{\mu\nu}(q, M^2).$$

Hierbei ist  $M$  eine große Masse. Das Ergebnis hängt also zunächst von  $M$  ab! Alternativ ist auch eine sog. dimensionale Regularisierung möglich,

$$4 \rightarrow 4 - \varepsilon \quad \text{Dimensionen.}$$

Die weitere Auswertung des Ausdrucks (5.1) erfolgt mit Hilfe der Identität

$$\frac{i}{\not{k} - m\mathbb{1} + i0^+} = \frac{i(\not{k} + m\mathbb{1})}{k^2 - m^2 + i0^+} = (\not{k} + m\mathbb{1}) \int_0^\infty dz e^{iz(k^2 - m^2 + i0^+)}.$$

**Beachte:** Die  $i0^+$ -Vorschrift regularisiert das Integral !!!

Nach Ausführung der Spur erhält man

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(q, m^2) &= -4(-ie)^2 \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty dz_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\quad \times [k_\mu(k - q)_\nu + k_\nu(k - q)_\mu - g_{\mu\nu}(k^2 - kq - m^2)] \\ &\quad \times \exp \{ iz_1[k^2 - m^2 + i0^+] + iz_2[(k - q)^2 - m^2 + i0^+] \}. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt führt man eine quadratische Ergänzung im Exponenten aus,

$$\ell = k - \frac{qz_2}{z_1 + z_2} = k - q + \frac{qz_1}{z_1 + z_2}.$$

Daraus folgt  $\exp\{ \}$   $\Rightarrow$   $\exp\{i\ell^2(z_1 + z_2)\}$ , und schließlich

$$\bar{I}_{\mu\nu}(q) = -\frac{i\alpha}{3\pi} g_{\mu\nu} q^2 \left\{ \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) - \underbrace{6 \int_0^1 dz z(1-z) \ln\left(1 - \frac{q^2}{m^2 - i0^+} z(1-z)\right)}_{\text{unabhängig von } M^2, \text{ das Integral existiert !!!}} \right\}.$$

Der Photonpropagator wird also wie folgt modifiziert:

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \Rightarrow -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) + \frac{2\alpha}{\pi} \mathcal{J}(q^2) \right]$$

mit

$$\mathcal{J}(q^2) = \int_0^1 dz z(1-z) \ln\left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2 - i0^+}\right).$$

Verschiedene Grenzfälle:

1. **statische Vakuum-Polarisation**,  $q^2 \rightarrow 0$

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \mathcal{J}(q^2) \rightarrow 0,$$

$\rightsquigarrow$  in der Nähe von  $q^2 = 0$  (d.h. im statischen Fall  $q^0 = 0$  und für kleine Impulsüberträge, also Coulomb-Potential bei großen Abständen) ergibt sich die folgende Modifikation des Photon-Propagators

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} Z_3,$$

mit der Renormierungskonstante der Ladung in Ordnung  $\alpha$

$$Z_3 = 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right).$$

Coulomb-Streuung in Born'scher Näherung

$$i e^2 \frac{\bar{u}\gamma_0 u}{q^2} \Rightarrow i \underbrace{e^2 Z_3}_{\equiv e_R^2} \frac{\bar{u}\gamma_0 u}{q^2}.$$

Hierbei bezeichnet

$$e \quad \text{die nackte Ladung,} \quad (5.2)$$

und

$$e_R = e\sqrt{Z_3} \quad \text{die physikalische Ladung.} \quad (5.3)$$

Die Größe  $e^2$  hat selbst keine physikalische Bedeutung (nackte Ladung !), da die Vakuum-Polarisation immer vorhanden ist. Hingegen ist  $e_R = e\sqrt{Z_3}$  die physikalisch wirksame und daher experimentell messbare Ladung. Es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{e_R^2}{4\pi} &= \alpha_R \approx \frac{1}{137} \\ e_R^2 &= e^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left( \frac{M^2}{m^2} \right) \right] \end{aligned}} \cdot$$

Renormierung der Ladung durch die statische Polarisierbarkeit des Vakuums!

## 2. Effekt der dynamischen Polarisation

### a) kleiner Impulsübertrag

für  $|\vec{q}|^2 = -q^2 \ll m^2$  gilt

$$\mathcal{J}(q^2) = - \int_0^1 dz z^2 (1-z)^2 \frac{q^2}{m^2} = -\frac{1}{30} \frac{q^2}{m^2}.$$

$\rightsquigarrow$  Propagator-Modifikation

$$\frac{ie^2}{q^2} \Rightarrow i \frac{e_R^2}{q^2} \left[ 1 - \frac{\alpha_R}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right]$$

Dies führt im **im Ortsraum** zu einer zusätzlichen Wechselwirkung am Ursprung

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi r} &\Rightarrow \left( 1 + \frac{\alpha_R}{15\pi m^2} \vec{\nabla}^2 \right) \frac{e_R^2}{4\pi r} \\ &= \frac{e_R^2}{4\pi r} + \frac{\alpha_R e_R^2}{15\pi m^2} \delta^3(\vec{r}) \end{aligned}$$

$\delta$ -Potential im Ursprung  $\rightsquigarrow$  **physikalischer Effekt!**

$\implies$

Energie-Verschiebung in wasserstoffartigen Atomen mit Ladung  $Z$ .

### 1. Ordnung Störungstheorie

$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l} &= - \frac{Z e_R^2 \alpha_R}{15\pi m^2} |\Psi_{n,l}(0)|^2 \\ &= - \frac{Z^2 \alpha^2 m}{2} \frac{8Z^2 \alpha^3}{15\pi n^3} \delta_{l,0} \end{aligned}$$

Beitrag für  $n = 2, l = 0, Z = 1$ :  $\nu = \frac{\Delta E}{\hbar} = -27 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

**Lambshift:** Unterschied zwischen  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ -Niveau im H-Atom. Die Frequenzverschiebung beträgt ungefähr  $+1000 \cdot 10^6 \text{ Hz}$  (herrührend von Nullpunktsfluktuationen des Strahlungsfeldes).

Die Vakuumpolarisation liefert einen negativen Beitrag zur Lambshift, welcher experimentell mit einer Genauigkeit  $< 0.01 \cdot 10^6 \text{ Hz}$  bestätigt wird.

b) **großer Impulsübertrag**  $|\vec{q}|^2 = -q^2 \gg m^2$   
 $\rightsquigarrow \mathcal{J}(q^2)$  wächst logarithmisch,

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \Rightarrow -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)\right) \left(1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{|\vec{q}|^2}{m^2}\right)\right).$$

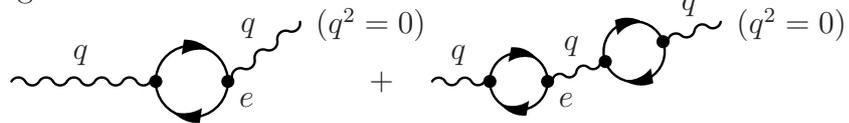
**d.f.:** bei  $\vec{q}^2 = M^2$  kompensiert die dynamische Korrektur gerade die Ladungsrenormierung.

**Vermutung:** In Streuexperimenten sieht man im Limes  $|\vec{q}|^2 \rightarrow \infty$  (beachte  $M^2 \rightarrow \infty$  !!) gerade die „nackte“ Ladung.

**Zeitartiges Photon**  $q^2 > 4m^2$

Im Bereich  $q^2 > 4m^2$  ist  $\mathcal{J}(q^2)$  komplex. Der Imaginärteil, welcher für  $q^2 > 4m^2$  auftritt, beschreibt die Möglichkeit der Erzeugung eines  $e^+e^-$ -Paares aus einem zeitartigen Photon.

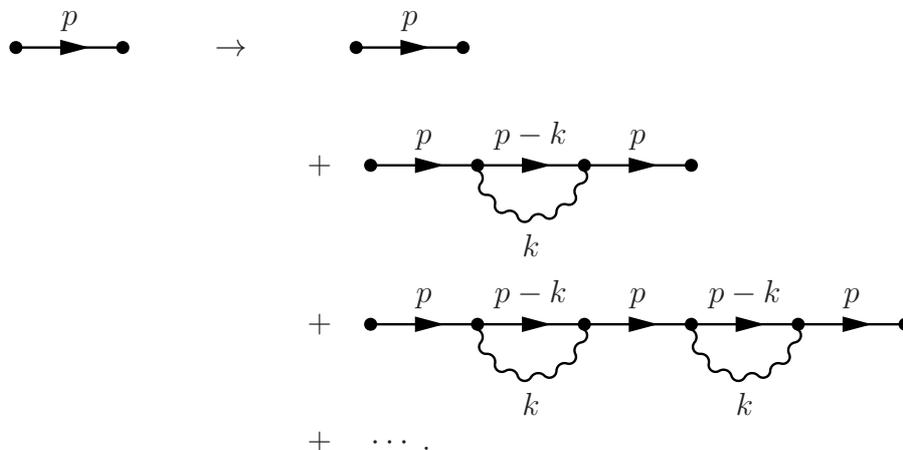
Renormierung von äußeren Photon-Linien durch Vakuumpolarisation.



Die Hinzunahme der Vakuumpolarisation ergibt

$$e_0 \Rightarrow e_0 \sqrt{Z_3} = e_R.$$

## 5.1.2 Strahlungskorrektur des Dirac-Propagators



$$\begin{aligned}
S_F(p) \rightsquigarrow S'_F(p) &= \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} + \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} \left( -i \sum(p) \right) \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} \\
&+ \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} \left( -i \sum(p) \right) \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} \left( -i \sum(p) \right) \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} \\
&+ \dots \\
&= \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1}} \frac{1}{1 - \frac{\sum(p)}{\not{p} - m\mathbb{1}}} = \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1} - \sum(p)}.
\end{aligned}$$

Nach Einführung einer kleinen Photonenmasse  $\lambda$  zur Vermeidung einer Infrarot-Divergenz, d.h.  $\lambda^2 \ll m^2$ , erhalten wir für die Selbstenergie den UV-divergenten Integralausdruck

$$-i \sum(p) \rightarrow -i \sum(p, \lambda) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - \lambda^2 + i0^+} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i0^+} \gamma^\nu.$$

**Pauli-Villars-Regularisierung:**  $\Lambda^2 \gg m^2$

$$\overline{\sum}(p) = \sum(p, \lambda) - \sum(p, \Lambda).$$

Die Auswertung des Integrals erfolgt analog zur „Vakuum-Polarisation“,

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow \overline{\sum}(p) &= \frac{3\alpha}{4\pi} m \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) - \frac{\alpha}{4\pi} (\not{p} - m) \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz [2m - \not{p}(1-z)] \ln \left( \frac{m^2 z^2 + \lambda^2(1-z)}{m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z)} \right).
\end{aligned}$$

Die weitere Auswertung ergibt für  $m\lambda \ll p^2 - m^2 \ll m^2$

$$\rightsquigarrow \boxed{\overline{\sum}(p) = \delta m - [Z_2^{-1} - 1 + C(p)] (\not{p} - m)} \quad (5.4)$$

mit

$$\delta m = \frac{3\alpha}{4\pi} m \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right)$$

und

$$Z_2^{-1} - 1 = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} - 2 \ln \left( \frac{m^2}{\lambda^2} \right) \right) \right].$$

Die Funktion  $C(p)$  ist unabhängig vom Cut-Off  $\Lambda$ . Ferner ist  $C(p^2 = m^2) = 0$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m\mathbb{1} - \overline{\Sigma}(p)} &= \frac{iZ_2}{(\not{p} - m)[1 + Z_2C(p)] - Z_2\delta m} \\ &= \frac{iZ_2}{\underbrace{(\not{p} - m\mathbb{1} - \delta m)}_{= \not{p} - m_{\text{ph}}}[1 + C(p)]} + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned}$$

Wir identifizieren

$$m_{\text{ph}} = m + \delta m \quad \text{als physikalische Masse.}$$

### Beachte:

Die Notwendigkeit der Massenrenormierung tritt schon in der klassischen Elektrodynamik auf.

Klassisches Elektron mit Radius  $a$ :

$$m + \underbrace{\frac{\alpha}{a}}_{\text{el.-magn. Selbstenergie}}$$

Für eine Punktladung gilt der Limes  $a \rightarrow 0$ . Somit divergiert die Selbstenergie invers zum Elektronenradius.

In unserem quantenfeldtheoretischen Fall tritt jedoch nur eine logarithmische Divergenz auf, und zwar wegen der Möglichkeit der Erzeugung virtueller Teilchen-Antiteilchen Paare, welche die Potential-Singularität am Ursprung abschwächen (vgl. Weisskopf, 1939).

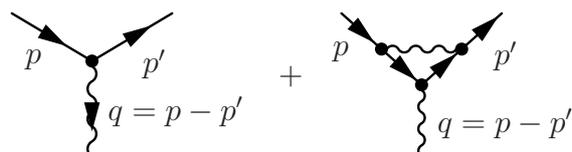
Beachte, dass  $\delta m$  formal divergent ist, jedoch ist  $\frac{\delta m}{m} \ll 1$  für  $\Lambda \ll m e^{2\pi/3\alpha} \approx 10^{100} m$ .

Hierzu im Vergleich: die Gesamtmasse des Universums beträgt  $\approx 10^{80} m$ .

Die „Dressing“-Funktion  $C(p)$  modifiziert den Elektron-Propagator, was einen physikalischen Effekt darstellt.

Die Renormierungskonstante  $Z_2$  des Elektronpropagators ist analog zu  $Z_3$  des Photon-Propagator. Es besteht die Möglichkeit  $Z_2$  durch Renormierung der Ladung zu absorbieren. Dies ist jedoch unnötig, da  $Z_2$  exakt durch die Vertex-Renormierung kompensiert wird.

### 5.1.3 Vertex-Renormierung



$$-ie\gamma^\mu \rightarrow -ie\gamma^\mu + -ie\Lambda^\mu(p', p)$$

$$\Lambda^\mu(p', p) = (-i)^2 4\pi \alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - \lambda^2 + i0^+} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}' - k - m + i0^+} \\ \times \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - k - m + i0^+} \gamma^\nu .$$

Zur Vermeidung einer Infrarot-Divergenz wurde zunächst eine endliche Photon-Masse eingeführt. Wiederum tritt eine UV-Divergenz auf. Isolierung der UV-Divergenz, indem wir setzen:

$$p'^2 = m^2, \quad p^2 = m^2, \quad \text{und} \quad q = p - p' = 0 .$$

Ferner führen wir eine Pauli-Villars-Regularisierung durch.

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu + \bar{\Lambda}^\mu(p, p) = Z_1^{-1} \gamma^\mu ,$$

wobei  $Z_1 = Z_1(m, \lambda, \Lambda)$  logarithmisch divergent für  $\Lambda \rightarrow \infty$  ist. Somit ist

$$\boxed{\bar{\Lambda}^\mu(p, p) = (Z_1^{-1} - 1) \gamma^\mu} .$$

Nun ist zu zeigen:  $Z_1 = Z_2$  .

Hierzu gehen wir von der Identität

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{1}{\not{p} - m} = - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m}$$

aus, woraus folgt

$$\boxed{\bar{\Lambda}^\mu(p, p) = - \frac{\partial \bar{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu}} .$$

Diese sog. Ward-Identität gilt sogar in allen Ordnungen von  $\alpha$ . Sie gilt mit oder ohne Pauli-Villars Regularisierung. Aus Gl. (5.4) folgt aber direkt

$$\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial p_\mu} = - [Z_2^{-1} - 1] \gamma^\mu ,$$

und damit

$$\bar{\Lambda}^\mu(p, p) = [Z_2^{-1} - 1] \gamma^\mu , \\ \Rightarrow \boxed{Z_1 = Z_2} .$$

Diese Beziehung wurde hier nun in Ordnung  $\alpha$  gezeigt. Sie gilt jedoch streng in allen Ordnungen von  $\alpha$ .

Wir fassen nun alle Beiträge zur Ladungsrenormierung zusammen:

$$\begin{aligned}
 -ie\gamma^\mu &\rightarrow -ie\gamma^\mu \underbrace{\sqrt{Z_3} \sqrt{Z_2} \sqrt{Z_1^{-1}}}_{=1} \\
 &= -ie \underbrace{\sqrt{Z_3}}_{=e_{\text{ph}}} \gamma^\mu = -ie_{\text{ph}} \gamma^\mu .
 \end{aligned}$$

Die Ladungsrenormierung kommt also allein durch die statische Vakuum-Polarisation zustande.

Sei im Folgenden nun  $p' \neq p$ ,

$$\Lambda^\mu(p', p) = (Z_1^{-1} - 1) \gamma^\mu + \underbrace{\Lambda_c^\mu(p', p)}_{\text{unabh. von UV-cut-off}} .$$

Die weitere Rechnung ergibt:

a.)  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  liefert Beitrag zum magnetischen Moment des Elektrons

$$\mu_B \Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \mu_B \quad (\text{Schwinger, 1948})$$

b.)  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  ergibt eine zusätzliche Wechselwirkung zum Coulomb-Potenzial. Diese liefert einen Beitrag zur Lamb-Shift.

## 5.2 Bedingungen für die Renormierbarkeit von Feldtheorien

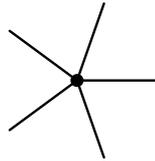
Beispiel: Skalarfeld mit Selbstwechselwirkung

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_I(\varphi)$$

mit

$$\mathcal{L}_I(\varphi) = \lambda \varphi^n \quad n \in \{3, 4, 5, \dots\} .$$

Diese Wechselwirkung führt zu einem Vertex mit  $n$  Beinen. Der Fall  $n = 5$  ergibt also den Vertex



Welche Werte für  $n$  führen zu renormierbaren Feldtheorien in  $(3 + 1)$ -Dimensionen?

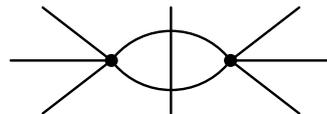
### Begriff des Einteilchen-irreduziblen Graphen

Solche Graphen können nicht in zwei nichtzusammenhängende Graphen zerlegt werden, indem man nur eine innere Linie durchschneidet.

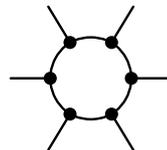
**1p-reduzibel:**



**1p-irreduzibel:**



Generelle Charakterisierung solcher Diagramme:

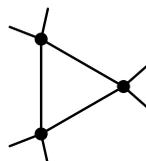


- $l$  = Zahl der externen Beine
- $i$  = Zahl der internen Linien (Propagatoren)
- $v$  = Zahl der Vertices
- $n$  = Potenz des Feldes in der Wechselwirkung

Diese Größen sind über die folgende Relation miteinander verknüpft:

$$\boxed{nv = l + 2i} . \tag{5.5}$$

Beispiel mit  $l = 6$ ,  $i = 3$ ,  $v = 3$  und  $n = 4$ :



## 5.2.1 Divergenzgrad von 1p-irreduziblen Diagrammen

Feynman-Regeln:

- für jede innere Linie (im UV-Limes)  $\int \frac{d^4 q}{q^2}$
- für jeden Vertex ein Faktor  $\delta^4(\dots)$  (Viererimpulserhaltung !!)

Divergenzgrad des Diagramms:

$$\int d^4 q q^{2i-4v} = \int d^4 q \frac{q^d}{q^4} \quad d \stackrel{!}{<} 0.$$

Es muss  $d < 0$  gelten damit das Integral UV-konvergent ist. Daraus folgt

$$\boxed{d = 2i - 4(v - 1)}. \quad (5.6)$$

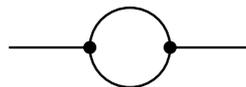
Mit der Beziehung (5.5) lässt sich die Zahl der inneren Linien  $i$  in Gl. (5.6) eliminieren,

$$\boxed{d = v(n - 4) - l + 4}.$$

In unserem Beispiel ist  $d = -2$ , und somit ist das Diagramm UV-konvergent.

1.) **Superrenormierbare Theorie:**  $d$  nimmt ab, wenn  $v$  zunimmt.

$\Rightarrow n - 4 < 0$ , also  $n = 3$ . Das einzige divergente Diagramm ist logarithmisch divergent ( $d = 0$ ) und ist durch  $v = 2$  und  $l = 2$  charakterisiert:



$$d(n = 3) = 4 - l - v$$

Massenrenormierung in Ordnung  $\lambda^2$ :

Elimination der Divergenz durch einen „Counter“-Term im Lagrangian

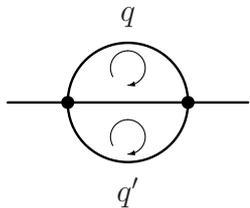


$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \lambda \varphi^3 - \delta m^2 \varphi^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \varphi) (\partial^\nu \varphi) - (m^2 + \delta m^2) \varphi^2 + \lambda \varphi^3 \end{aligned}$$

$$\Delta'_F = \frac{1}{p^2 - m^2 + \bigcirc - \star} = \frac{1}{p^2 - m^2 + \bigcirc - \delta m^2}.$$

2.) **Renormierbare Theorie:**  $d$  ist unabhängig von  $v \Rightarrow n = 4$  ( $\varphi^4$ -Theorie)

Stärkster divergenter Graph:  $d = 4 - l$



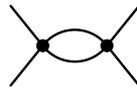
$$\int d^4q \int d^4q' \frac{1}{q^2 q'^2} \frac{1}{(q - q')^2} \sim \int \frac{d^4q}{q^2} \Rightarrow d = 2$$

Counter-Term:

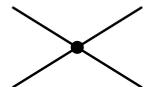


$$\delta m^2 + (Z_2 - 1)(p^2 - m^2)$$

Ferner ist divergent ( $l = 4, d = 0$ )



Logarithmische Divergenz wird kompensiert durch einen Gegenterm der Form



$$(Z_1 - 1)\varphi^4$$

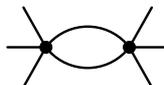
Der vollständige Lagrangian lautet somit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z_2 [\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - (m^2 + \delta m^2) \varphi^2] + \lambda Z_1 \varphi^4.$$

Die Renormierungsparameter  $Z_1, Z_2$  und  $\delta m$  sind so zu wählen, dass die in der Störungstheorie auftretenden Divergenzen gerade kompensiert werden.

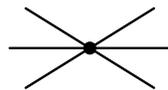
3.) **Nichtrenormierbare Theorie:**  $d$  wächst mit  $v$ , also für  $n \geq 5$

Beispiel:  $n = 5 \Rightarrow d = v - l + 4$  und  $\mathcal{L}_I = \lambda_5 \varphi^5$

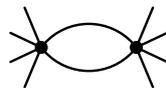


$$d = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow \text{log. divergent}$$

Zur Renormierung ist ein Counter-Term der Form  $\lambda_6 \varphi^6$  erforderlich:



Dieser Counter-Term führt wiederum zu dem folgenden logarithmisch divergenten Diagramm



Zu dessen Renormierung ist ein weiterer Counter-Term der Form  $\lambda_8 \varphi^8$  erforderlich,



**Der Versuch der Renormierung der logarithmischen Divergenz in allen Ordnungen führt also zu einer unendliche Anzahl von Kopplungen höherer Ordnung !!!**

# 6 Abelsche U(1)–Eichtheorien

## 6.1 Globale Eichinvarianz, Erhaltung der Ladung

Sei gegeben

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m \mathbb{1}) \psi(x) .$$

$\mathcal{L}_0$  ist invariant unter der globalen Phasentransformation (U(1)–Invarianz)

$$\underline{\psi}(x) \rightarrow \underline{\psi}'(x) = e^{i\alpha} \underline{\psi}(x) . \quad (6.1)$$

Infinitesimal schreibt sich diese Transformation

$$\underline{\psi}'(x) = (1 + i\delta\alpha) \underline{\psi}(x) .$$

Das Noethersche Theorem liefert dann

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu &= -iq \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \underline{\psi})} \underline{\psi} = q \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) \\ \implies Q &= \int d^3\vec{x} j^0(\vec{x}, t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gausschen Satzes lässt sich zeigen, dass gilt

$$\frac{dQ(t)}{dt} = 0 .$$

Ladungserhaltung für den Lagrangian mit Wechselwirkung  $\mathcal{L}_0(\underline{\psi}) + \mathcal{L}_I(\underline{\psi})$  liegt vor, wenn gilt

$$\mathcal{L}(\underline{\psi}) = \mathcal{L}(\underline{\psi}') .$$

**Beispiel:**  $\mathcal{L}_I = j^\mu j_\mu$

Die globale U(1)–Invarianz schränkt  $\mathcal{L}_I$  zwar ein; sie bestimmt die Wechselwirkung aber nicht vollständig. Die Phase  $\alpha$  hat keine physikalische Bedeutung. Sie kann global durch eine Eichung festgelegt werden.

## 6.2 Lokale Eichinvarianz und Wechselwirkung

An der globalen Eichinvarianz ist unbefriedigend, dass, wenn man eine Eichung festlegt, diese instantan überall gilt. Zufriedenstellender wäre, wenn statt der globalen Eichinvarianz

**lokale** Eichinvarianz gelten würde.

Wir fordern daher nun, dass die Phase beliebig orts- und zeitabhängig gewählt werden kann und bestimmen die Wechselwirkung derart, dass die Physik von der speziell gewählten Phase unberührt bleibt:

$$\underline{\psi}(x) \rightarrow \boxed{\underline{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\underline{\psi}(x)}.$$

Es soll also gelten

$$\mathcal{L}(\underline{\psi}', \partial_\mu \underline{\psi}') = \mathcal{L}(\underline{\psi}, \partial_\mu \underline{\psi}).$$

Nun ist aber

$$\partial_\mu \underline{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \underline{\psi}(x) + i e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x) \partial_\mu \alpha(x) \Rightarrow \mathcal{L}_0(\underline{\psi}', \partial_\mu \underline{\psi}') \neq \mathcal{L}_0(\underline{\psi}, \partial_\mu \underline{\psi}).$$

Der Lagrangian eines freien Dirac-Teilchens ist also **nicht** invariant unter einer lokalen U(1)-Eichtransformation.

Ausweg: **Ersetzung der lokalen durch die (eich)-kovariante Ableitung:**

$$\boxed{\mathcal{D}'_\mu \underline{\psi}'(x) \doteq e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \underline{\psi}(x)}$$

Per definitionem transformiert sich also die eichkovariante Ableitung  $\mathcal{D}'_\mu \underline{\psi}'(x)$  genau so wie  $\underline{\psi}'(x)$ .

Somit ändern wir den Lagrangian des freien Dirac-Feldes wie folgt ab:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\underline{\psi}}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}) \underline{\psi}(x) \Rightarrow \mathcal{L} = \bar{\underline{\psi}}(x) (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m\mathbb{1}) \underline{\psi}(x),$$

wodurch die geforderte Eigenschaft der lokalen Eichinvarianz gewährleistet ist,

$$\mathcal{L}(\underline{\psi}', \mathcal{D}_\mu \underline{\psi}') = \mathcal{L}(\underline{\psi}, \mathcal{D}_\mu \underline{\psi}).$$

**Welche Form hat nun  $\mathcal{D}_\mu \underline{\psi}(x)$  ?**

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x),$$

$$\mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu + igA'_\mu(x),$$

$$\text{wobei} \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x).$$

Die explizite Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu \underline{\psi}'(x) &= \partial_\mu [e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x)] + igA'_\mu(x) e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \underline{\psi}(x) + e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x) i \partial_\mu \alpha(x) + igA_\mu(x) e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x) - i e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x) \partial_\mu \alpha(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \underline{\psi}(x). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt fordern wir nun, dass das Eichfeld  $A_\mu(x)$  selbst ein dynamisches Feld darstellt. Dies wird durch Hinzunahme eines eichinvarianten kinetischen Lagrangian des Eichfeldes gewährleistet,

$$\mathcal{L}_0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m\mathbb{1}] \underline{\psi}(x) + \mathcal{L}_0(A_\mu) .$$

Definition des eichinvarianten Feldstärketensors:

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \quad \Longrightarrow \quad F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} ,$$

$$\mathcal{L}_{0M} = \mathcal{L}_0(A_\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\underline{\psi}) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m\mathbb{1}] \underline{\psi}(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \\ &= \mathcal{L}_{0,D} + \mathcal{L}_{0,M} + \mathcal{L}_I \end{aligned}$$

mit der Wechselwirkungsichte

$$\mathcal{L}_I = -A_\mu j^\mu = -g A_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \underline{\psi}(x) .$$

Hierbei bezeichnet  $g$  die elektromagnetische Kopplungskonstante,  $g = q = e = -|e|$ . Zusammenfassend gilt also

$$\mathcal{L}(\underline{\psi}, A_\mu) = \mathcal{L}(\underline{\psi}', A'_\mu), \quad \underline{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)} \underline{\psi}(x) \quad \text{und} \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) .$$

- Das Eichfeld der lokalen  $U(1)$ -Invarianz eines massiven Teilchens ist das Maxwell-Feld
- Das Eichfeld beschreibt masselose Teilchen (Photonen)
- Hinzunahme eines Masseterms der Form

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}} = -\mu^2 A'_\nu(x) A'^\nu(x) \neq -\mu^2 A_\nu(x) A^\nu(x)$$

würde die Eichinvarianz brechen !!!

- Korrespondenzprinzip

$$\begin{aligned} i\partial_\mu &= \hat{p}_\mu \hat{=} p_\mu \\ i\partial_\mu &\rightarrow i\mathcal{D}_\mu \\ p_\mu &\rightarrow p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu(x) \end{aligned}$$

Hinweis: Die eichkovariante Ableitung entspricht der Minimalsubstitution.

- Die Euler–Lagrange–Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \right) = 0 & \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbf{1}) \underline{\psi}(x) = q \gamma^\mu A_\mu \underline{\psi}(x), \\ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0 & \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \underbrace{q \bar{\psi} \gamma^\nu \psi}_{= j^\nu}, \end{aligned}$$

führen auf ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem für das Spinorfeld  $\underline{\psi}(x)$  und das Vektorfeld  $A_\mu(x)$ .

## 6.3 Dynamische Massenerzeugung in Eichtheorien

Wie verleiht man dem Eichteilchen Masse ohne dass die lokale Eichinvarianz verletzt wird? **Stichwort: Renormierbarkeit !!!**

### 6.3.1 Spontane Symmetrie-Brechung im $U(1)$ –Goldstone–Modell

Sei  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_1(x) + i\phi_2(x)]$  und  $\mathcal{L}(\phi) = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi)$  mit

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}\lambda^2 \underbrace{|\phi|^4}_{(\phi^* \phi)^2} - \frac{1}{2}\mu^2 |\phi|^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die **Hamiltondichte** lautet:

$$\mathcal{H} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + V(\phi).$$

$\mathcal{L}$  und  $\mathcal{H}$  sind invariant unter der Phasentransformation

$$\phi' = \phi e^{i\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \phi'_1 &= \phi_1 \cos(\alpha) - \phi_2 \sin(\alpha) \\ \phi'_2 &= \phi_2 \cos(\alpha) + \phi_1 \sin(\alpha) \end{cases}$$

#### Grundzustand:

Der Grundzustand im symmetriebrechenden „Sektflaschenpotenzial“ (6.2) liegt nicht am Feldursprung,  $\phi^{(0)} \neq 0$ , und ist im Betrag  $|\phi^{(0)}| = \frac{f}{\sqrt{2}}$  mit  $f = \frac{\mu}{\lambda}$ ,

$$\phi^{(0)} = \frac{f}{\sqrt{2}} e^{i\delta}.$$

Sei nun speziell  $\delta = 0$ , also

$$\phi^{(0)} = \frac{f}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Dieser Grundzustand bricht die Rotationssymmetrie des Lagrangians. Unter Hinzunahme der Quantenfluktuationen, d.h. der Auslenkungen aus dem Grundzustand, haben wir dann

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{f}{\sqrt{2}} + \chi_1(x), \\ \phi_2(x) &= \chi_2(x), \\ \text{bzw. in Polardarstellung} \quad \phi(x) &= \left( \frac{f}{\sqrt{2}} + \rho(x) \right) e^{i\Theta(x)/f}.\end{aligned}$$

Hierbei beschreibt  $\rho(x)$  die Feldanregungen quer zur Rinne (radiale Anregung) und  $\Theta(x)$  die Feldanregungen entlang der Rinne (Goldstone–Anregung). Damit wird die Lagrangedichte ausgedrückt in den Feldern  $\chi_1(x)$  und  $\chi_2(x)$  zu

$$\mathcal{L}(\chi_1, \chi_2) = \mathcal{L}_0(\chi_1, \chi_2) + \mathcal{L}_I(\chi_1, \chi_2),$$

mit

$$\mathcal{L}_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{2} [(\partial^\nu \chi_1)(\partial_\nu \chi_1) - \mu^2 \chi_1^2] + \frac{1}{2} (\partial_\nu \chi_2)(\partial^\nu \chi_2),$$

und

$$\mathcal{L}_I(\chi_1, \chi_2) = -\frac{1}{2} |\mu| \lambda [\chi_1^2 + \chi_2^2] \chi_1 - \frac{\lambda^2}{8} (\chi_1^2 + \chi_2^2)^2 + \frac{\mu^4}{8\lambda^2}.$$

Interpretation von  $\mathcal{L}_0$ :

- Das Skalarfeld  $\chi_1(x)$  beschreibt ein Teilchen der Masse  $\mu$ . Es entspricht einer Anregung quer zur Potenzialrinne.
- Das Skalarfeld  $\chi_2(x)$  beschreibt ein Teilchen der Masse Null. Es entspricht einer Anregung längs der Potenzialrinne (Goldstone–Teilchen).

### Goldstone Theorem:

Bricht der Grundzustand eine kontinuierliche Symmetrie der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , dann treten in dem betrachteten Modell Masse–Null–Teilchen mit Spin Null (Goldstone–Teilchen) auf.

## 6.3.2 Das Higgs–Kibble–Modell

Modell: Elektromagnetische Wechselwirkung im Goldstone-Modell

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.3)$$

mit

$$\mathcal{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig A_\mu.$$

Der Lagrangian ist invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= e^{i\alpha(x)} \phi(x), \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x).\end{aligned}$$

Grundzustand:

$$\begin{aligned}\phi^{(0)} &= \frac{f}{\sqrt{2}} e^{i\delta} = \frac{f}{\sqrt{2}} \quad \text{für} \quad \delta = 0, \\ A_\mu^{(0)} &= 0.\end{aligned}$$

Feldverschiebung:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [f + \rho(x)] e^{i\theta(x)/f}$$

Hierbei ist  $\rho(x)$  die radiale Anregung (quer zur Potenzialrinne) und  $\theta(x)$  die Goldstone-Anregung (längs der Potenzialrinne).

Es ist nun möglich, die Goldstone-Anregung vermöge der Eichfunktion

$$\alpha(x) = -\theta(x)/f$$

wegzueichen. Denn es ergibt sich

$$\rho'(x) = \rho(x); \quad \theta'(x) = 0; \quad \text{und} \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{fg} \partial_\mu \theta(x).$$

Einsetzen von

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [f + \rho(x)], \\ \mathcal{D}'_\nu \phi'(x) &= \partial_\nu \phi'(x) + i g A'_\nu(x) \phi'(x),\end{aligned}$$

in den Lagrangian

$$\mathcal{L}(\phi', A'_\mu) = \mathcal{D}'_\mu \phi'^* \mathcal{D}'^\mu \phi' - V(\phi') - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(A')} F^{(A')\mu\nu}$$

führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \rho \partial^\nu \rho - \mu^2) \\ &+ \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(A')} F^{(A')\mu\nu} - \frac{1}{2} g^2 f^2 A'_\mu A'^\mu \right) \\ &- A'_\mu A'^\mu \frac{1}{2} g^2 (\rho^2 + 2f\rho) - \frac{1}{2} \lambda^2 \rho^4 - \frac{1}{2} \lambda^2 f \rho^3 + \text{const}.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Die erste Zeile beschreibt das Higgs-Feld eines Teilchen der Masse  $\mu = f\lambda$ , die zweite Zeile repräsentiert das Eichfeld eines Vektorbosons der Masse  $gf$ , und die dritte Zeile beschreibt die Wechselwirkung dieser Teilchen.

Betrachtung der inneren Freiheitsgrade:

- Lagrangian (6.3): Das Feld  $\phi$  besitzt zwei innere Freiheitsgrade  $\phi_1$  und  $\phi_2$ . Das Eichfeld  $A_\mu$  (Masse Null, Spin Eins) besitzt ebenfalls zwei innere (transversale) Freiheitsgrade. Somit liegen insgesamt vier innere Freiheitsgrade vor.
- Lagrangian (6.4): Das Higgs-Feld  $\rho(x)$  repräsentiert einen Feld-Freiheitsgrad. Das „massive“ Eichfeld  $A'_\mu(x)$  besitzt drei innere Freiheitsgrade (transversale und longitudinale Anregungen).

Anschauliche Deutung des Higgs-Kibble Phänomens:

Die spontane Brechung der kontinuierlichen Symmetrie des Potentials führt zu einer Goldstone-Anregung. Die Goldstone-Anregung wird durch eine geeignete Eichung vom Eichfeld „verschluckt“. Letzteres erhält dadurch den longitudinalen Freiheitsgrad und wird somit massiv. Die Zahl der inneren Freiheitsgrade bleibt bei der Umeichung erhalten.

**Erweiterung:**

Die eichkovariante Wechselwirkung von geladenen Dirac-Teilchen mit massiven Vektorbosonen wird durch das folgende erweiterte Goldstone-Higgs-Kibble-Modell beschrieben:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m \mathbb{1}) \psi + \mathcal{D}_\mu \phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} .$$

Generelles Problem von „massiven“ Eichtheorien ist das Auftreten von skalaren Higgs-Teilchen.

# 7 Nichtabelsche (Yang–Mills)–Eichtheorien

Die Gruppe  $U(1)$  ist kommutativ oder „abelsch“, und die entsprechenden Eichfeldgleichungen sind linear. Dagegen sind nichtabelsche Symmetriegruppen, wie etwa die Lie–Gruppen  $SU(N)$ , durch nichtkommutative Generatoren gekennzeichnet. Es wird sich herausstellen, dass die entsprechenden Eichfelder nichtlinear sind und somit miteinander wechselwirken.

## 7.1 Die Symmetriegruppe $SU(N)$

Die Lie–Gruppe  $SU(N)$  ist die Gruppe der eigentlichen  $N \times N$ –Matrizen mit der Eigenschaft

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1} .$$

Wegen der Unitaritätsbedingung unterliegen die  $2N^2$  reellen Matrixelemente  $N^2+1$  Zwangsbedingungen, sodass die Gruppe durch  $N^2-1$  nicht–kommutative Generatoren bzw.  $N^2-1$  freie Parameter gekennzeichnet ist.

**Beispiele:**

- $N = 2 \quad \exists \quad 3$  Generatoren
- $N = 3 \quad \exists \quad 8$  Generatoren  $T^a$  (hermitesche, spurlose Matrizen) mit der Algebra

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c .$$

Hierbei bezeichnet  $f^{abc}$  die Strukturkonstante der Gruppe.

**Bsp.: Interne nichtabelsche Symmetriegruppe:  $SU(2)$**

Im Falle der  $SU(2)$ –Gruppe denken wir uns eine Welt mit exakter Isospin–Invarianz. Würde man die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung abschalten können, dann hätten Proton und Neutron genau die gleichen physikalischen Eigenschaften (Spin, Masse) und wären daher ununterscheidbar. Jede beliebige Linearkombination von Proton und Neutron könnte wiederum als Proton oder als Neutron bezeichnet werden. Es liegt daher nahe, die Dirac–Gleichungen für das Proton und Neutron

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \underline{\psi}_p = 0 , \tag{7.1}$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \underline{\psi}_n = 0 , \tag{7.2}$$

zu einer Dirac-Gleichung für den Nukleon-Isospinor

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad N_{i\alpha} \quad i \in \{1, 2\},$$

zusammenzufassen. Die Indizes in der Bezeichnung  $N_{i,\alpha}$  stehen für den Isospin ( $i \in \{n, p\}$ ) und für das Spinorelement ( $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ ).

Die freie Lagrangedichte des Nukleonfeldes nimmt somit die Form

$$\mathcal{L}_0 = \overline{N} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}] \underline{N},$$

bzw. in Indexnotation

$$= N_{r,\alpha} \underbrace{[i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - m \delta_{\alpha\beta}]}_{\text{diagonal in den Indizes } \alpha, \beta} N_{r,\beta}. \quad (7.3)$$

an. „Drehungen“ im Isospinraum werden beschrieben durch Transformationen der Form

$$\underline{N}' = \underbrace{e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}}}_{\text{unitäre Matrix}} \underline{N} \xrightarrow{\text{infinitesimal}} \underline{N}' = \left[ \mathbb{1} - \frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau} \right] \underline{N},$$

bzw. in Indexschreibweise

$$N'_r = \left[ \delta_{rs} - \frac{i}{2}\alpha_a \tau_{rs}^a \right] N_s,$$

wobei  $\vec{\tau} = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ . Die Generatoren  $T^a$  der  $SU(2)$ -Gruppe stehen mit den Paulimatrizen  $\tau^a$  über die Relation

$$T_{ij}^a = -\frac{1}{2}\tau_{ij}^a$$

in Beziehung.

Im allgemeinen  $SU(N)$ -Fall werden die Generatoren im  $r$ -dimensionalen Raum durch hermitesche Matrizen  $T_{ij}^a$  vom Rang  $r$  dargestellt. Entsprechend haben „Drehungen“ von Isospinoren

$$\underline{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{pmatrix}$$

die Form

$$\underline{\Phi}' = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \underline{\Phi} = e^{i\alpha^a T^a} \underline{\Phi}.$$

Für eine entsprechende infinitesimale Drehung ergibt sich in Indexschreibweise

$$\phi'_j = \phi_j + i\delta\alpha^a T_{jl}^a \phi_l. \quad (7.4)$$

### 7.1.1 Globale Eichinvarianz

Der freie Lagrangian

$$\mathcal{L}_0(\underline{\Phi}, \partial_\mu \underline{\Phi}) = \overline{\underline{\Phi}} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}] \underline{\Phi} \quad (7.5)$$

ist invariant unter globalen  $SU(N)$ -Rotationen,

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}' &= e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}} \underline{\Phi}, \\ \partial_\mu \underline{\Phi}' &= e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}} \partial_\mu \underline{\Phi}, \\ \mathcal{L}_0(\underline{\Phi}, \partial_\mu \underline{\Phi}) &= \mathcal{L}_0(\underline{\Phi}', \partial_\mu \underline{\Phi}'). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Somit liefert das Noether-Theorem  $N$  erhaltene Ströme,  $\partial_\mu j^a(x) = 0$  mit  $a \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$j_\mu^a = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_r)} T_{rs}^a \phi_s$$

und damit  $N$  erhaltenen Ladungen,

$$Q^a = \int d^3\vec{x} j_0^a(\vec{x}, t); \quad \frac{d}{dt} Q^a = 0.$$

Der „Drehvektor“  $\vec{\alpha}$  hat keinerlei physikalische Bedeutung. Seine Festlegung erfolgt durch eine geeignete Konvention.

### 7.1.2 Lokale Eichinvarianz

Ersetzt man im Lagrangian (7.6) die partielle Ableitung durch die eichkovariante Ableitung,  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu$ , mit der Wirkungsweise

$$\mathcal{D}'_\mu \underline{\Phi}'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x) \cdot \vec{T}} \mathcal{D}_\mu \underline{\Phi}(x), \quad (7.7)$$

dann ist der resultierende Lagrangian invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$\underline{\Phi}'(x) = e^{i\vec{\alpha}(x) \cdot \vec{T}} \underline{\Phi}(x) \equiv g(x) \underline{\Phi}(x).$$

Die eichkovariante Ableitung besitzt die Form

$$\mathcal{D}_\mu \underline{\Phi}(x) = \partial_\mu \underline{\Phi}(x) + i q \vec{T} \vec{W}_\mu(x) \underline{\Phi}(x) \equiv \partial_\mu \underline{\Phi}(x) + i \mathcal{A}_\mu(x) \underline{\Phi}(x),$$

wobei  $\mathcal{A}_\mu(x) = q \vec{T} \vec{W}_\mu(x)$ , und lautet in Indexschreibweise

$$\mathcal{D}_\mu \phi_i(x) = \partial_\mu \phi_i(x) + i q T_{ij}^a W_\mu^a(x) \phi_j(x).$$

Der auf diese Weise eingeführte Satz von Eichfeldern  $W_\mu^a(x)$  transformiert sich gemäß

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_\mu(x) &= g(x) [\mathcal{A}_\mu(x) - i \partial_\mu] g^{-1}(x), \\ W_\mu'^a(x) &= W_\mu^a(x) + f^{abc} \alpha^b(x) W_\mu^c(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha^a(x).\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Beziehung (7.7) berechnen wir direkt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_\mu \underline{\Phi}(x) &= [\partial_\mu + i \mathcal{A}'_\mu(x)] g(x) \underline{\Phi}(x) \\ &= \{ \partial_\mu + i g(x) \mathcal{A}_\mu(x) g^{-1}(x) + g(x) [\partial_\mu g^{-1}(x)] \} g(x) \underline{\Phi}(x) \\ &= \partial_\mu (g(x) \underline{\Phi}(x)) + i g(x) \mathcal{A}_\mu(x) \underline{\Phi}(x) + g(x) [\partial_\mu g^{-1}(x)] g(x) \underline{\Phi}(x) \\ &= g(x) \partial_\mu \underline{\Phi}(x) + i g(x) \mathcal{A}_\mu(x) \underline{\Phi}(x) \\ &\quad + \underbrace{(\partial_\mu g(x)) \underline{\Phi}(x) + g(x) [\partial_\mu g^{-1}(x)] g(x) \underline{\Phi}(x)}_{\substack{\partial_\mu [g(x) g^{-1}(x)] g(x) \underline{\Phi}(x) = 0 \\ = \mathbb{1}}} \\ &= g(x) \mathcal{D}_\mu \underline{\Phi}(x) \\ &= e^{i \vec{\alpha}(x) \vec{T}} \mathcal{D}_\mu \underline{\Phi}(x). \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Der eichinvariante Feldstärketensor  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = q F_{\mu\nu}^a(x) T^a$  besitzt die explizite Form

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x) - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x) + i [\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x)], \quad (7.8)$$

bzw.

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu W_\nu^a(x) - \partial_\nu W_\mu^a(x) - q f^{abc} W_\mu^b W_\nu^c. \quad (7.9)$$

Nimmt man den kinetischen Term der Eichfelder hinzu, dann erhalten wir schließlich als Erweiterung des Lagrangian (7.5) die folgende unter lokalen  $SU(N)$ -Eichtransformationen invariante Form:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\underline{\Phi}, \mathcal{D}_\mu \underline{\Phi}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a, \mu\nu}.$$

**Resumé:** Die  $SU(N)$ -eichinvariante Kopplung impliziert die Ankopplung des Materiefeldes an  $N^2 - 1$  masselose Eichfelder. Diese wechselwirken sowohl mit dem Materiefeld als auch, da sie Ladung tragen, unter einander.

## 7.2 Quantenchromodynamik

### 7.2.1 Phänomenologische Grundlagen

Die elementaren Konstituenten der Materie (Quarks) tragen Spin  $\frac{1}{2}$ . Somit unterliegen sie der Fermi-Statistik und genügen der Dirac-Gleichung. Flavour (Geschmack) und Colour

(Farbe) treten als weitere innere Freiheitsgrade hinzu.

### Flavour:

Entsprechend der Zahl der Flavours legt man die  $SU(N)_{\text{FI}}$ -Gruppe als Symmetriegruppe zugrunde. Da die Quarks unterschiedliche Massen besitzen, ist die  $SU(N)_{\text{FI}}$ -Symmetrie allerdings nur näherungsweise gültig.

In der Großen Vereinheitlichung (Grand Unified Theory) von elektromagnetischer, schwacher und starker Wechselwirkung ist aus Gründen der Renormierbarkeit der entsprechenden lokalen Feldtheorie erforderlich, dass die Anzahl der Leptonen derjenigen der Quark-Flavours entspricht.

Zur Zeit sind drei Lepton-Familien, nämlich  $(e, \nu_e)$ ,  $(\mu, \nu_\mu)$  und  $(\tau, \nu_\tau)$  bekannt. Diesen leptonischen Familien entsprechen die bislang aufgefundenen Flavour-Familien

- up- und down-Quark (u, d)
- strange- und charm-Quark (s, c)
- bottom- und top-Quark (b, t)

Die Lepton-Quark-Symmetrie ist also gegenwärtig saturiert.

Die sechs im Flavour unterschiedlichen Quarks bilden zusammen die  $SU(6)_{\text{FI}}$ -Gruppe.

### Geschichtliches:

1964: Zu dieser Zeit sind 4 Leptonen  $(e, \mu, \nu_e, \nu_\mu)$  bekannt, jedoch nur drei Quarks, nämlich das up-, down- und strange-Quark

- Gell-Mann und Zweig untersuchen die  $SU(3)_{\text{FI}}$ -Symmetrie
- Glashow postuliert aus dem oben genannten Grund das 4. Quark (c-quark)

1976: Der Charm-Freiheitsgrad wird mit der Entdeckung des  $\Psi$ -Mesons, welches sich als  $c\bar{c}$ -Bindungszustand entpuppt, erstmals experimentell verifiziert

1977: Das  $\tau$ -Lepton wird entdeckt. Nimmt man das  $\tau$ -Neutrino  $\nu_\tau$  hinzu, welches dann im Jahr 2000 am Fermilab nachgewiesen wurde, dann liegt es nahe, die Quarks um eine weitere Familie zu erweitern. In Konsequenz der postulierten großen Vereinheitlichung werden das bottom- und das top-Quark postuliert. Im selben Jahr wird das erste Hadron mit b-Quark Inhalt am Fermilab gesichtet. Das b-Quark hat etwa die Masse von vier Protonen ( $4.3 \text{ GeV}/c^2$ )

1995: Am  $p\bar{p}$ -Collider des Fermilabs werden Hadronen-Jets gesichtet, die aus dem Elementarprozess  $u\bar{u} \rightarrow t\bar{t}$  resultieren. Das top-Quark erweist sich als etwa so schwer wie ein Goldkern ( $170 \text{ GeV}/c^2$ )

### Einteilung in Familien nach gegenwärtigem Stand:

	Leptonen	Quarks
1. Familie	$e, \nu_e$	$u, d$
2. Familie	$\mu, \nu_\mu$	$s, c$
3. Familie	$\tau, \nu_\tau$	$b, t$
?	...	...

## Einteilung der Elementarteilchen

**Hadronen:** alle Teilchen mit starker Wechselwirkung

- Mesonen (Baryonenzahl  $B = 0$ )
  - $\pi^0, \pi^\pm$  leichte Mesonen ( $\approx 150 \text{ MeV}/c^2$ )
  - $K^0, K^\pm, \dots$  seltsame Mesonen (enthalten das s-Quark)
- Baryonen (Baryonenzahl  $B = 1$ )
  - $p, n, \Lambda, \Xi, \Sigma^-, \Omega^-$

$SU(3)_{\text{Fl}}$ -Symmetrie und Quarkhypothese:

- Mesonen sind Bindungszustände eines Quarks mit einem Antiquark
- Baryonen sind Bindungszustände von drei Quarks

Daraus folgt, dass Quarks Drittelladung tragen und Fermionen mit Spin  $1/2$  sind. Unter der starken Wechselwirkung bleiben Isospin  $I$ , Seltsamkeit  $S$ , Baryonenzahl  $B$  und Hyperladung  $Y$  erhalten.

Die Gruppe  $SU(3)$  besitzt acht ( $3 \times 3$  spurlose hermitesche) Generatoren  $T^a$  mit der Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (7.10)$$

Die Gell-Mann und Nishijima Beziehungen geben den Zusammenhang mit der Ladung  $Q$ ,

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3, \quad Y = B + S.$$

### Triplett der Quarks:

Die Triplets der Quarks  $u, d, s$  und der Antiquarks  $\bar{u}, \bar{d}$  und  $\bar{s}$  bilden die Basen für die zwei fundamentalen Darstellungen der Gruppe  $SU(3)_{\text{Fl}}$ . Die Quarkladungen sind  $Q_u = \frac{2}{3}$ ,  $Q_d = Q_s = \frac{1}{3}$  und die Baryonenzahl von  $u, d$  und  $s$  beträgt jeweils  $B = \frac{1}{3}$ .

### Mesonen- und Baryonen-Multipletts:

Höhere Darstellungen der  $SU(3)_{\text{Fl}}$  erhält man, indem man direkte Produkte der Basis-spinoren bildet. Die resultierenden Zustände bilden Unterräume des Hilbertraums. Das direkte Produkt von Triplett und Anti-Triplet spannt den Raum der Mesonen auf. Zu Gesamtspin 0 und Gesamtspin 1 gibt es jeweils einen Satz von neun Zuständen. Jeder der

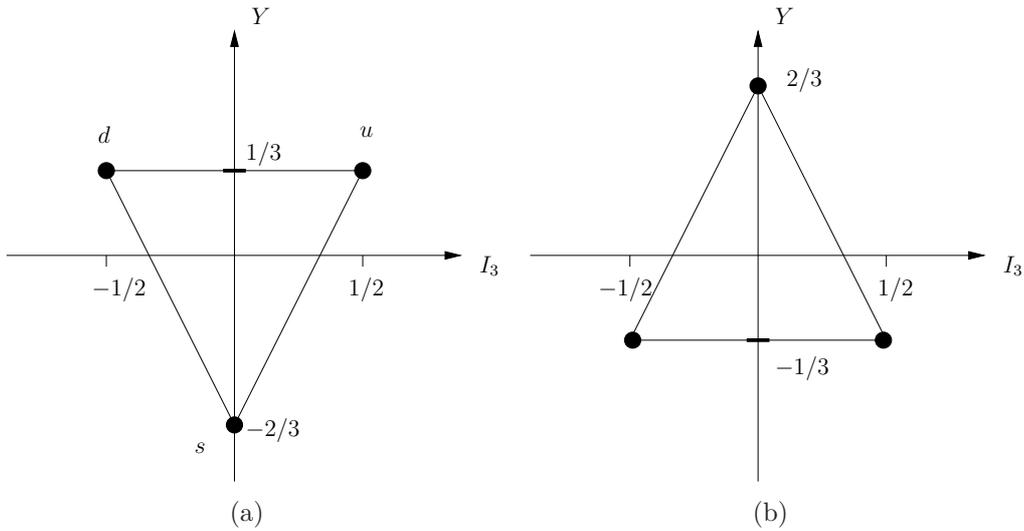


Abbildung 7.1: Triplett der Quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  (a) und der entsprechenden Anti-Quarks (b)

beiden Sätze lässt sich in ein Singulett und ein Oktett zerlegen. Symbolisch können wir also schreiben

$$\{3\} \times \{\bar{3}\} = \{1\} + \{8\}.$$

Die insgesamt 18 Zustände können mit den beobachteten pseudoskalaren und vektoriellen Mesonen identifiziert werden.

Die möglichen Baryonenzustände ( $B = 1$ ) lassen sich ableiten, indem man das dreifache direkte Produkt der Basisspinoren bildet und in die direkte Summe der irreduziblen Betandteile zerlegt. Die Zerlegung ergibt ein Singulett, zwei Oktetts und ein Dekuplett,

$$\{3\} \times \{3\} \times \{3\} = \{1\} + \{8\} + \{8\} + \{10\}.$$

Die Multipllett-Symmetrie ist wegen der unterschiedlichen Quarkmassen nur näherungsweise gültig. Die niederenergetischen Baryonenzustände können in ein  $SU(3)$ -Oktett mit Spin  $\frac{1}{2}$  und ein Resonanz-Dekuplett mit Spin  $\frac{3}{2}$  eingeordnet werden. In Abb. 7.2 ist das Spin- $\frac{1}{2}$  Baryonen-Oktett dargestellt. Das Resonanz-Dekuplett zum Spin  $\frac{3}{2}$  führte zur Postulierung der  $\Omega^-$ -Resonanz, welche danach auch experimentell sichtbar wurde.

Die Baryonen-Multipletts der entsprechenden Antiteilchen ergeben sich durch Spiegelung am Ursprung und Ladungskonjugation,  $q \rightarrow -q$ .

„Die Standard- $SU(N)$ -Flavour-Theorie führt auf eine Reihe von „Puzzles“. Die wichtigsten seien hier erwähnt:

- **Spin-Statistik-Problem:**

Das  $\Omega^-$ -Baryon besteht aus drei identischen  $s$ -Quarks, welche sich alle im selben  $1s$ -Zustand (Grundzustand) befinden. Dies ist eigentlich nach dem Pauli-Prinzip nicht

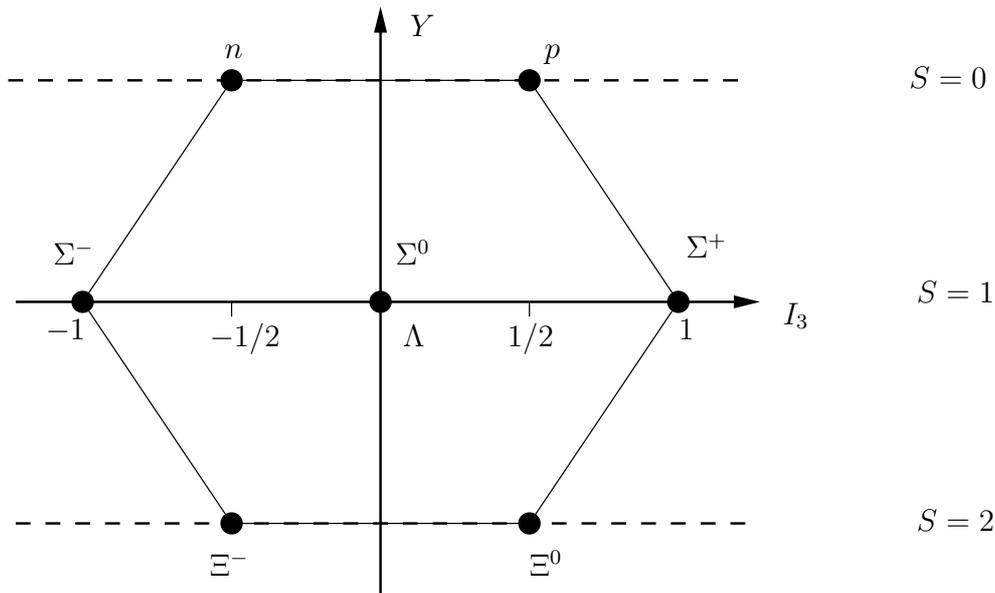


Abbildung 7.2: Oktett der Spin- $\frac{1}{2}$ -Baryonen

möglich, es sei denn, sie genügen einer Parastatistik, oder – was bei weitem befriedigender wäre – dass sie sich in einer bislang noch nicht berücksichtigten weiteren Quantenzahl unterscheiden.

- **Wirkungsquerschnitt für den Streuprozess  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen:**

$$R = \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}}}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = m \sum_i \frac{Q_i^2}{e^2}, \quad (\text{siehe Abschnitt 4.5.8})$$

Im Standard-Quark-Modell ist  $m = 1$ . Das Experiment deutet jedoch auf den Multiplizitätsfaktor  $m = 3$  hin.

Diese beiden Puzzles und andere Rätsel werden im Rahmen der Farbhypothese von Gell-Mann und Fritsch gelöst.

### Farbhypothese:

Jedes einzelne der Flavour-Quarks kommt in den Farben rot (r), gelb (y) und blau (b) vor. In den daraus zusammengesetzten Hadronen sind alle Farben gleichberechtigt gemischt, sodass sie farblos erscheinen. Die Farbmischungen sind:

- Mesonen besitzen Farbmischungen der Form

$$\text{Mesonen} \approx \bar{q}_{1r}q_{2r} + \bar{q}_{1y}q_{2y} + \bar{q}_{1b}q_{2b}$$

- Baryonen sind in der Farbe total antisymmetrische Linearkombinationen. Diese lauten in Slater–Determinatenschreibweise

$$\text{Baryonen} \approx \begin{vmatrix} q_{1r} & q_{1y} & q_{1b} \\ q_{2r} & q_{2y} & q_{2b} \\ q_{3r} & q_{3y} & q_{3b} \end{vmatrix}$$

### Globale $SU(3)_{\text{Colour}}$ –Symmetrie:

Nimmt man Spin, Flavour und Colour zusammen, dann tragen die Komponenten des Quark–Spinorfelds  $\underline{\Psi}$  nun den Spinorindex  $\alpha$ , den Flavourindex  $f$  und den Colourindex  $c$ , i.e.  $\psi_{\alpha, f, c}$ . Dann lautet der Lagrangian des freien Quarkfeldes

$$\mathcal{L}_0(\underline{\Psi}, \partial_\mu \underline{\Psi}) = \sum_{\alpha, \beta; f, c} \bar{\psi}_{\alpha, f, c} \left[ i \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - M_f \delta_{\alpha\beta} \right] \psi_{\beta, f, c} . \quad (7.11)$$

Infinitesimale  $SU(3)_{\text{Colour}}$ –Rotationen besitzen die Form

$$\psi'_{\alpha, c, f} = \psi_{\alpha, c, f} + i \sum_{a=1}^8 \sum_c \delta\alpha^a T_{c c'}^a \psi_{\alpha, c', f} ,$$

wobei die hermiteschen Matrizen  $T_{c c'}^a$  dreidimensionale Darstellungen der Operatoren  $T^a$  zur Algebra (7.10) sind. Beachte nun, dass der Lagrangian (7.11) invariant unter allen  $SU(3)_{\text{Colour}}$ –Rotationen ist,

$$\mathcal{L}_0(\underline{\Psi}, \partial_\mu \underline{\Psi}) = \mathcal{L}_0(\underline{\Psi}', \partial_\mu \underline{\Psi}') . \quad (7.12)$$

## 7.2.2 Dynamische $SU(3)_{\text{Colour}}$ –Symmetrie

### Zentrale Idee:

Erweiterung der globalen Farbinvarianz zu einer lokalen  $SU(3)_{\text{Colour}}$ –Farbinvarianz.

Dies wird nun erreicht, indem wir im Lagrangian (7.12) die partielle durch die eichkovariante Ableitung ersetzen und den Lagrangian der Eichfelder hinzufügen. Wir erhalten

$$\mathcal{L}(\underline{\Psi}, \partial_\mu \underline{\Psi}) = \mathcal{L}_0(\underline{\Psi}', \mathcal{D}_\mu \underline{\Psi}') - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a, \mu\nu} , \quad (7.13)$$

mit

$$\mathcal{D}_\mu \psi_{\alpha, f, c}(x) = \partial_\mu \psi_{\alpha, f, c}(x) + i q T_{c, c'}^a W_\mu^a(x) \psi_{\alpha, f, c'}(x) ,$$

und

$$G_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu W_\nu^a(x) - \partial_\nu W_\mu^a(x) - q f^{abc} W_\mu^b(x) W_\nu^c(x) .$$

Die Wechselwirkung der Quarks wird also durch acht masselose Eichteilchen, die sog. Gluonen, vermittelt. Diese tragen Farbladung und wechselwirken daher auch miteinander, d.h. die dynamischen Gleichungen der Gluonfelder sind nichtlinear !!!

Der Lagrangian (7.13) ist invariant unter der kombinierten Farbeichtransformation von Materie- und Eichfeld

$$\begin{aligned}\psi_c(x) &\rightarrow \psi'_c(x) = [e^{i\alpha^a(x)T^a}]_{cc'} \psi_{c'}(x), \\ W_\mu^a(x) &\rightarrow W_\mu'^a(x) = W_\mu^a(x) + f^{abc} \alpha^b(x) W_\mu^c(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x).\end{aligned}$$

Diese kann mit  $\mathcal{A}_\mu(x) = g T^a W_\mu^a(x)$  auch in der Kompaktform

$$\begin{aligned}\underline{\Psi}(x) &\rightarrow \underline{\Psi}'_c(x) = g(x) \underline{\Psi}(x) \\ \mathcal{A}_\mu(x) &\rightarrow \mathcal{A}'_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu(x) + g(x) [\mathcal{A}_\mu(x) - i\partial_\mu] g^{-1}(x)\end{aligned}$$

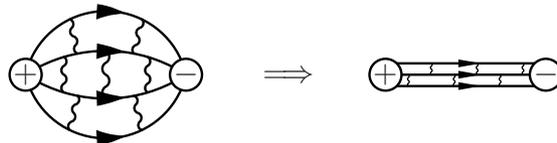
geschrieben werden.

Bei hohen Energien (kurzen Abständen) ist die quantenchromodynamische Wechselwirkung perturbativ (asymptotische Freiheit), während sie bei großen Abständen in nichtperturbative Weise behandelt werden muss. Dieser Bereich kann im Rahmen der numerischen Gitter-Quantenchromodynamik untersucht werden. Hiermit können zwei Grundprobleme analysiert werden:

### 1. Quark-Confinement:

Die Quarks und Gluonen sind zunächst hypothetische Teilchen, da sie nie als freie Teilchen beobachtet wurden. Offenbar können sie keine asymptotisch freien Zustände bilden, da sie Farbladung besitzen. Dagegen ist dies den Hadronen, welche farbneutral sind, gestattet.

Sowohl die Phänomenologie als auch Gitter-QCD-Rechnungen zeigen, dass das Potenzial zwischen Farbladungen bei großen Abständen linear mit dem Abstand anwächst. Ursache hierfür ist die Wechselwirkung der Gluonen untereinander. Ein anschauliches Bild hierfür ist, dass die Wechselwirkungen der Gluonen die Ausdehnung der Feldlinien im Raum behindert und sie effektiv auf eine quasi-eindimensionale Röhre um die Verbindungsachse der Farbladungen zusammenschnürt. Dies wird als der **quantenchromodynamische Meissner-Effekt** bezeichnet.

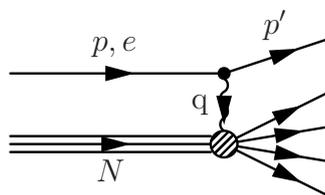


In anderen Worten: Bei großen Abständen von Farbladungen verhält sich also die QCD in 3 + 1-Dimensionen wie die gewöhnliche Maxwell'sche Elektrodynamik in 1 + 1-Dimensionen !!! (Anm.: Beim Plattenkondensator wächst das Potenzial zwischen den Platten ebenfalls linear mit dem Abstand).

## 2. Asymptotische Freiheit:

In nicht-abelschen Eichtheorien geht die effektive Kopplungskonstante  $q_{\text{eff}}$  bei kurzen Abständen (bzw. hohen Energien) gegen Null. Dieses Phänomen wird als asymptotische Freiheit bezeichnet.

- **Theorie:** Der Ein-Gluonen-Austausch dominiert den elementaren Streuprozess zwischen den Quarks. Da das Gluon masselos ist, gibt es in diesem Elementarprozess keinen Längenparameter (Skaleninvarianz!). Das Nukleon verhält sich so, als ob es aus punktförmigen Konstituenten bestünde, die sich im Nukleon quasi frei bewegen (Partonen-Modell von Björken und Feynman)
- **Experiment:** Die von der QCD vorhergesagte Skaleninvarianz kann in der tief-inelastischen Lepton-Nukleon ( $e^- - N$ ) Streuung (hoher Impulsübertrag) sichtbar gemacht werden.



$$q_\mu q^\mu \ll 0 \quad (\text{tief raumartiges Photon})$$

### Tief-inelastische $e^- - N$ -Streuung

Kinematische Variable:

$$\begin{aligned} \nu &:= p^\mu q_\mu = (E - E')M_N, \\ q^\mu q_\mu &= -4EE' \sin^2(\Theta/2). \end{aligned}$$

Die rechten Seiten gelten im Laborsystem bei vernachlässigter Elektronenmasse.

Inklusiver Wirkungsquerschnitt für  $e^- + N \rightarrow e^- + X$  (wobei über alle hadronischen Endzustände  $X$  summiert wird):

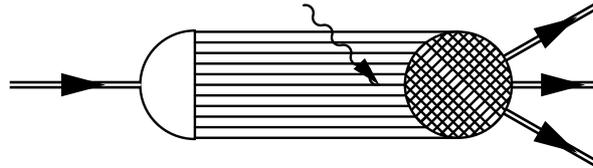
$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\Theta/2)} \left\{ \cos^2(\Theta/2)W_2(\nu, q^2) + 2 \sin^2(\Theta/2)W_1(\nu, q^2) \right\}.$$

Hierbei gibt der erste Faktor den Wirkungsquerschnitt wieder, wenn das Nukleon punktförmig wäre. Die geschweifte Klammer beschreibt die Effekte der inneren Struktur des Nukleons. Die Strukturfunktionen ergeben sich aus dem Erwartungswert des Stromkommutators:

$$\begin{aligned} W_{\mu\delta} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\text{Pol.}} \int d^4x e^{iqx} \langle p | [J_\mu(x), J_\delta(x)] | p \rangle \\ &= \left( \frac{q_\mu q_\delta}{q^2} - g_{\mu\delta} \right) W_1(\nu, q^2) + \frac{1}{M_N^2} \left( p_\mu - \frac{\nu q_\mu}{q^2} \right) \left( p_\delta - \frac{\nu q_\delta}{q^2} \right) W_2(\nu, q^2) \end{aligned}$$

### Partonenmodell von Björken und Feynmann (1969):

Im Skalenlimes  $q^2 \rightarrow -\infty$  und  $\nu \rightarrow \infty$  greift das virtuelle tief-raumartige Photon an den quasi-freien punktförmigen Konstituenten des Nukleons an. Diese physikalische Bild ergibt, dass die Strukturfunktionen nicht mehr separat von  $q^2$  und  $\nu$  abhängen, sonder nur noch von der „Scaling“-Variablen  $\omega = 2\nu/(-q^2)$ .



Die im Parton-Modell vorhergesagte Skaleninvarianz bei der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung wurde experimentell sehr genau bestätigt. Aus winkelaufgelösten Messungen können die Strukturfunktionen  $W_1(\omega)$  und  $W_2(\omega)$  separiert werden. Aus dem gemessenen Verhältnis kann geschlossen werden, dass die Partonen den Spin  $\frac{1}{2}$  tragen.

Da im Rahmen der QCD das Parton Farbladung trägt, kann es nicht aus dem Nukleon herausgeschossen werden. Es schließen sich Sekundärprozesse an, in denen der überschüssige Viererimpuls auf farbneutrale Parton-Arrangements verteilt wird. Diese entweichen dann als Hadronen aus dem Nukleon.

# 8 Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung

- schwache Wechselwirkung: verantwortlich u.a. für  $\beta^-$ ,  $\mu^-$  und Hyperon-Zerfall
- Reichweite ca.  $10^{-15} \dots 10^{-16}$  cm
- Nichterhaltung von Strangeness, Charm,  $I_z$  (Isospin-Komponente), Parität

## 8.1 Die universelle Fermi-Wechselwirkung

1896 Erste Hinweise auf  $\beta^-$ -Zerfall von Uran (Becquerel)

Verständnisschwierigkeit: Das  $\beta^-$ -Teilchen hat ein kontinuierliches Energiespektrum

1930 Pauli: Forderung eines weiteren hypothetischen Teilchen mit geringer Masse

$\implies$  Neutrino

1934 Fermi-Theorie des  $\beta^-$ -Zerfalls

Heute verstehen wir die Fermi Theorie als die Niederenergie-Approximation einer vollständigeren Theorie, in welcher die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zur elektro-schwachen Wechselwirkung einheitlich zusammengefasst sind. In dieser allgemeineren Theorie wird die elektro-schwache Wechselwirkung durch den Austausch von Photon und massiven Vektorbosonen im Rahmen einer dynamischen  $SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}$ -Eichtheorie vermittelt. Hierbei steht – wie wir sehen werden –  $SU(2)_W$  für die schwache Isospin-Gruppe und  $U(1)_{Y_W}$  für die schwache Hyperladung, d.h. eine Linearkombination aus neutraler schwacher Ladung und elektromagnetischer Ladung.

Friert man die Dynamik des massiven Vektorbosons ein (d.h. vernachlässigt man den von ihm getragene Impuls), dann kehrt man zur ursprünglichen Fermi-Theorie (angereichert um die neutralen Ströme) zurück.

In der Fermi-Theorie wird die schwache Wechselwirkung durch Strommatrixelemente beschrieben. Im Niederenergiebereich gibt es große Übereinstimmung mit dem Experiment, obwohl die Fermi-Theorie nicht zu einer unitären  $S$ -Matrix führt. Nur die niedrigste Ordnung (die sog. Tree-Diagramme) hat physikalische Relevanz, während die in höheren Ordnungen auftretenden Loop-Diagramme UV-divergent und nicht renormierbar sind.

Für eine Reihe von Stoßprozessen lässt sich das Unitaritätsproblem beseitigen, indem man

die Verallgemeinerung auf intermediäre Vektorbosonen vornimmt. Das Problem der Nicht-renormierbarkeit ist dadurch allerdings nicht beseitigt. Dies gelingt erst, wenn man die elektromagnetische und schwache Wechselwirkung zu einer einheitlichen elektro-schwachen Eichtheorie vereinigt.

### 8.1.1 Elektromagnetische und schwache Wechselwirkung der Leptonen

Im Fermi-Modell ist die Wechselwirkungsichte der geladenen und neutralen Prozesse eine Vier-Fermion-Kopplung vom Strom-Strom-Kopplungstyp

$$\mathcal{L}_1^{\text{schwach}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left( j_\rho^{(+)}(x) j^{\rho(-)}(x) + j_\rho^{(n)}(x) j^{\rho(n)}(x) \right).$$

Die Kopplungskonstante ist auch im natürlichen Maßsystem dimensionsbehaftet und ist

$$G_F = 1.02 \times 10^{-5} \text{ M}_\text{p}^2. \quad (8.1)$$

Der geladene und der neutrale Strom setzen sich aus einem leptonischen und einem hadronischen Anteil zusammen

$$\begin{aligned} j_\rho^{(\pm)}(x) &= \ell_\rho^{(\pm)}(x) + h_\rho^{(\pm)}(x), \\ j_\rho^{(n)}(x) &= \ell_\rho^{(n)}(x) + h_\rho^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Jeder der leptonischen Familien  $\{e, \nu_e\}$ ,  $\{\mu, \nu_\mu\}$ ,  $\{\tau, \nu_\tau\}$  ordnet man eine eigene Leptonenzahl zu. Diese Quantenzahl ist in allen beobachteten Leptonenprozessen eine Erhaltungsgröße. Dies folgt u.a. aus dem Verbot des Strahlungserfalls

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma.$$

Bemerkenswert ist die Universalität der Wechselwirkung, da sämtliche Beiträge in gleicher Weise aus den Dirac-Feldern der Leptonen  $\underline{e}(x)$ ,  $\underline{\nu}_e(x)$ ,  $\underline{\mu}(x)$ ,  $\underline{\nu}_\mu(x)$ ,  $\underline{\tau}(x)$ , und  $\underline{\nu}_\tau(x)$  aufgebaut sind. Es gilt:

#### Elektromagnetischer Strom:

$$\ell_\rho^{(\text{em})}(x) = -\bar{e}(x) \gamma_\rho \underline{e}(x) - \bar{\mu}(x) \gamma_\rho \underline{\mu}(x) - \bar{\tau}(x) \gamma_\rho \underline{\tau}(x)$$

#### Geladener schwacher Strom:

$$\begin{aligned} \ell_\rho^{(+)}(x) &= \bar{\nu}_e(x) \gamma_{\rho,L} \underline{e}(x) + \bar{\nu}_\mu(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\mu}(x) + \bar{\nu}_\tau(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\tau}(x) \\ \ell_\rho^{(-)}(x) &= \bar{e}(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\nu}_e(x) + \bar{\mu}(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\nu}_\mu(x) + \bar{\tau}(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\nu}_\tau(x) \end{aligned}$$

### Neutraler schwacher Strom:

$$\begin{aligned}\ell_\rho^{(0)}(x) &= \frac{1}{2} \left( \bar{\nu}_e(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\nu}_e(x) - \bar{e}(x) \gamma_{\rho,L} \underline{e}(x) \right. \\ &\quad + \bar{\nu}_\mu(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\nu}_\mu(x) - \bar{\mu}(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\mu}(x) \\ &\quad \left. + \bar{\nu}_\tau(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\nu}_\tau(x) - \bar{\tau}(x) \gamma_{\rho,L} \underline{\tau}(x) \right) \\ \ell_\rho^{(n)}(x) &= \ell_\rho^{(0)}(x) - \sin^2 \theta_W \ell_\rho^{(\text{em})}(x)\end{aligned}$$

wobei

$$\gamma_{\rho,L} = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma_5) \gamma_\rho .$$

- Der elektromagnetische Strom ist ein reiner Vektor-Strom.
- Die Ströme  $\ell_\rho^{(\pm)}$  und  $\ell_\rho^{(0)}$  setzen sich aus gleichgewichteten Vektor- und Axialvektor-Anteilen zu linkshändigen  $L = \frac{1}{2}(V - A)$ -Strömen zusammen. Ursache für diesen Ansatz ist die beobachtete maximale Verletzung der Parität in den geladenen schwachen Prozessen. Bei den neutralen schwachen Prozessen hängt die Stärke der Paritätsverletzung wegen der durch den Weinberg-Winkel  $\theta_W$  gegebenen Beimischung des elektromagnetischen Stroms von der elektromagnetischen Ladung der Teilchen ab. Experimentell ist  $\sin^2 \theta_W = 0,228 \pm 0,010$ .
- Prinzipiell könnte man in die Vier-Fermion-Kopplung auch noch skalare  $g_S \bar{\psi}\psi \bar{\psi}\psi$ , pseudoskalare  $g_P \bar{\psi}\gamma_5\psi \bar{\psi}\gamma_5\psi$ , sowie tensorielle und Ableitungskopplungen hinzunehmen. Diese Terme sind aber offenbar in der Natur nicht gegeben.
- Die zu den Strömen  $\ell_\rho^{(\pm)}(x)$  und  $\ell_\rho^{(0)}(x)$  gehörigen erhaltenen Ladungen

$$I_W^{(\pm)}(t) = \int d^3\vec{r} l_0^{(\pm)}(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad I_W^0(t) = \int d^3\vec{r} l_0^0(\vec{r}, t) \quad (8.2)$$

besitzen die Kommutatoren

$$[I_W^+(t), I_W^-(t)] = 2I_W^0(t), \quad [I_W^0(t), I_W^\pm(t)] = 2I_W^\pm(t) .$$

Die entsprechende Algebra ist die Algebra der  $SU(2)$ -Lie-Gruppe. Sie wird in diesem Zusammenhang als schwache Isospin-Gruppe  $SU(2)_W$  bezeichnet.

Hieraus resultiert die folgende Einteilung:

- ◊ Die rechtshändigen Anteile der Spinoren  $\underline{e}$ ,  $\underline{\mu}$ , und  $\underline{\tau}$  bilden Isospin-Singulets,

$$\underline{R}_e = \underline{e}_R \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \underline{e}, \quad \underline{R}_\mu = \underline{\mu}_R \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \underline{\mu}, \quad \underline{R}_\tau = \underline{\tau}_R \equiv \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \underline{\tau},$$

◇ Die entsprechenden linkshändigen Anteile

$$\underline{e}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\underline{e}, \quad \underline{\mu}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\underline{\mu}, \quad \underline{\tau}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\underline{\tau}$$

bilden mit den voll linkshändigen Neutrinos Isospin–Dubletts,

$$\underline{L}_e = \begin{pmatrix} \underline{\nu}_e \\ \underline{e}_L \end{pmatrix} \quad \underline{L}_\mu = \begin{pmatrix} \underline{\nu}_\mu \\ \underline{\mu}_L \end{pmatrix} \quad \underline{L}_\tau = \begin{pmatrix} \underline{\nu}_\tau \\ \underline{\tau}_L \end{pmatrix} .$$

• Die schwache Hyperladung

$$\frac{1}{2}Y_W(t) = Q - I_W^{(0)}(t) = \int d^3\vec{r} \left( \ell_0^{(\text{em})}(\vec{r}, t) - \ell_0^{(0)}(\vec{r}, t) \right)$$

ist eine Erhaltungsgröße. Die entsprechende Symmetriegruppe ist die abelsche Gruppe  $U(1)_{Y_W}$ .

Da  $Y_W(t)$  mit allen Komponenten des schwachen Isospins kommutiert, bildet die schwache Hyperladung mit dem schwachen Isospin die Produktgruppe

$$\underbrace{SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}}_{\text{elektroschwache Wechselwirkung}} \quad (8.3)$$

### Fermi–Theorie des Muon Zerfalls:

Die invariante Amplitude des Muon–Zerfalls  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e$  ergibt sich in niedrigster Ordnung in der Kopplungskonstanten  $G_F$  zu

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (2\pi)^4 \langle e^-, \bar{\nu}_e, \nu_\mu | \mathcal{L}_I^{\text{weak}} | \mu^- \rangle \\ &\times \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \bar{e}(p_e) | \gamma_{\rho,L} | \nu_e(q_{\nu_e}) \rangle \langle \bar{\nu}_\mu(q_{\nu_\mu}) | \gamma^\rho_L | \mu(p_\mu) \rangle . \end{aligned}$$

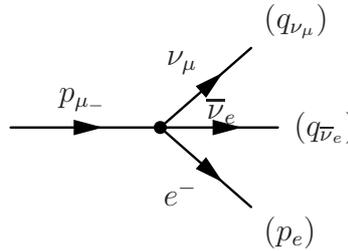


Abbildung 8.1: Diagramm und Kinematik des Muon–Zerfalls

Hiermit berechnet sich die differentielle Zerfallsrate zu

$$d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E} \delta^4(p_\mu + q_{\nu_e} - p_e - q_{\nu_\mu}) \frac{d^3\vec{q}_{\nu_e}}{2E_{\nu_e}} \frac{d^3\vec{p}_e}{2E_e} \frac{d^3\vec{q}_{\nu_\mu}}{2E_{\nu_\mu}} :$$

Hieraus folgt für die Gesamtzerfallsrate der Ausdruck

$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{G_F^2 M_\mu^5}{192\pi^3}.$$

Aus der gemessenen Lebensdauer bzw. inversen Zerfallsrate  $\tau_{\text{exp}} = 2,19 \times 10^{-6}$  sec ergibt sich der in Gl. (8.1) angegebene Wert für die Fermi-Konstante  $G_F$ .

### Elektron-Neutrino-Streuung

Die Messung der Wirkungsquerschnitte für die Streuprozesse  $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$  und  $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$  ermöglicht die Bestimmung des Weinberg-Winkels  $\theta_W$ .

### Verletzung der Unitaritätsschranke:

In Tree-Graphen-Näherung (d.h. keine Loop-Diagramme) wachsen die totalen Wirkungsquerschnitte der verschiedenen Lepton-Neutrino-Stoßprozesse linear mit dem Energieparameter  $s = 2M_e E_\nu$  an. Dies deutet auf ein Versagen der punktförmigen Strom-Strom-Kopplung bei hohen Energien hin:

- Einerseits ergibt sich die invariante Amplitude des Streuprozesses

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$$

zu

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \bar{u}(p_\mu) \gamma^{\rho L} \underline{u}(k_{\nu_\mu}) \bar{u}(k_{\nu_e}) \gamma_{\rho L} \underline{u}(p_e), \quad (8.4)$$

und hiermit der differentielle Wirkungsquerschnitt

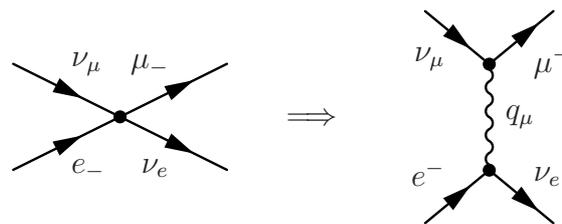
$$\frac{d\sigma(\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_e \mu^-)}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} \frac{(s - M_e^2)^2}{s} \quad (8.5)$$

- Andererseits ergibt die von der Unitarität gesetzte Schranke für die S-Matrix die Ungleichung  $d\sigma/d\Omega \leq 1/s$ . Ab  $\sqrt{s} \approx 500$  GeV verletzt Gl. (8.5) diesen Unitaritätsslimes.

### Verteausaufweichung durch Vektorbosonen:

Die Strom-Strom-Kopplung kann durch Einführung von Vektorbosonen genügend großer Masse so aufgeweicht werden, dass – zumindest für die Neutrino-Lepton-Streuung – das Unitaritätsproblem beseitigt ist, ohne dass sich das Niederenergieverhalten ändert. Die geladenen Ströme werden dabei an ein geladenes Vektorboson  $W^\pm$  und die neutralen Ströme an ein neutrales Vektorboson  $Z^0$  gekoppelt, deren Austausch zwischen den Strömen dann in Analogie zum 1-Photon-Austausch die Wechselwirkung vermittelt.

**Beispiel:**  $W^-$ -Austausch im Stoßprozess  $e^- + \nu_\mu \rightarrow \mu^- + \nu_e$



Der Vektorboson–Austausch führt zu einer deutlichen Verbesserung des Hochenergieverhaltens. Die Berechnung des Feynman–Diagramms ergibt

$$\mathcal{M} = \frac{g_W^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \bar{u}(p_\mu) \gamma^{\rho L} \underline{u}(k_{\nu_\mu}) \frac{-\gamma_{\rho\sigma} + q_\rho q_\sigma / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \bar{u}(k_{\nu_e}) \gamma^{\sigma L} \underline{u}(p_e), \quad (8.6)$$

wobei  $q^2 = (p_e - k_{\nu_e})^2$ ,  $0 \leq q^2 \leq s$ . Verglichen mit (8.4) haben wir einen Faktor  $1/q^2$  gewonnen, sodass sich der totale Wirkungsquerschnitt für große Energien wie  $g_W^4/s$  verhält. Bei Energien  $s \ll M_W^2$  geht der Ausdruck (8.6) in den Fermi–Ausdruck (8.4) über, wenn man die Kopplungskonstanten  $g_W$  und  $G_F$  wie folgt miteinander identifiziert:

$$\frac{4G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_W^2}{2M_W^2}. \quad (8.7)$$

In ähnlicher Weise kann für neutrale Stromprozesse die Strom–Strom–Kopplung durch die Einführung des Austausches eines neutralen Vektorbosons  $Z^0$  aufgeweicht werden.

Die derart eingeführten Vektorbosonen helfen allerdings nicht vollständig. Da diese Masse besitzen, können sie auch longitudinale Polarisationszustände einnehmen. Da die „per Hand“ eingeführten Bosonmassenterme die Eichinvarianz verletzen, ist die Vektorboson–Feldtheorie nicht renormierbar. Dieser Mangel tritt z.B. auf, wenn man die Wirkungsquerschnitte für die  $W$ –Paarproduktion berechnen möchte. Man findet nämlich, dass ohne Berücksichtigung der Vereinheitlichung mit der el.magn. Wechselwirkung die entsprechenden Feynman–Diagramme zu stark divergent sind.

## 8.1.2 Elektromagn. und schwache Wechselwirkung der Hadronen

### Elektromagnetischer Strom

Im Rahmen des Quark–Modells können die Ströme der Hadronen auf die ihrer Konstituenten, also auf die Quarkströme, zurückgeführt werden. Der elektromagnetische Strom der Hadronen lautet

$$h_\rho^{(\text{em})}(x) = \bar{\psi}_{f,c}(x) \gamma_\mu Q_{ff'} \delta_{cc'} \psi_{f',c'}$$

mit

$$Q_{ff'} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \} \text{u, d} \\ \} \text{s, c} \\ \} \text{t, b} \end{array} \right\}$$

Die Diagonalelemente von  $Q_{ff'}$  geben die Ladungen der Quarks (in Einheiten der Elementarladung) in den einzelnen Familien wieder.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Im folgenden unterdrücken wir den Colour–Index, da die diskutierten Ströme Colour–Singulets sind.

## Geladener schwacher Strom

Experimentell erweist sich, dass die für die Leptonen in Gl. (8.3) formulierte Gruppenstruktur  $SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}$  auch in hadronischen schwachen Prozessen gültig ist. Entsprechend erweitern wir die Definition (8.2) der Generatoren des schwachen Isospins um den hadronischen Strombeitrag:

$$I_W^{(\pm)}(t) = \int d^3\vec{r} \left[ l_0^{(\pm)}(\vec{r}, t) + h_0^{(\pm)}(\vec{r}, t) \right], \quad I_W^{(0)}(t) = \int d^3\vec{r} \left[ l_0^{(0)}(\vec{r}, t) + h_0^{(0)}(\vec{r}, t) \right].$$

In Analogie zu den Leptonen ordnen wir die  $N_{F1}$  rechtshändigen Quarks in Isospin-Singulets und die entsprechenden linkshändigen Quarks in Isospin-Dubletts ein,

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad \dots \quad \begin{array}{l} \leftarrow Q = 2/3 \\ \leftarrow Q = -1/3 \end{array}$$

Der geladene Strom der schwachen Wechselwirkung der Hadronen wird – in Analogie zu den Leptonen – nur von den linkshändigen Quarks aufgebaut. Für  $N_{F1} = 4$  gilt dann

$$h_\rho^{(+)}(x) = \bar{u}(x) \gamma_{\rho,L} [\cos \theta_C \underline{d}(x) + \sin \theta_C \underline{s}(x)] + \bar{c}(x) \gamma_{\rho,L} [-\sin \theta_C \underline{d}(x) + \cos \theta_C \underline{s}(x)].$$

Der Cabibbo-Winkel  $\theta_C$  misst die Stärke der  $\Delta I = \frac{1}{2}$ -Übergänge. Aus dem Hyperon-Zerfall bestimmt man ihn zu  $\sin \theta_C = 0,21$ .

### 8.1.3 Neutraler schwacher Strom

Wie bei den Leptonen besteht der schwache Strom der Quarks aus der nullten Komponente des schwachen Isospinstroms und einer durch denselben Weinberg-Winkel gegebenen Beimischung des elektromagnetischen Quarkstroms,

$$h_\rho^{(n)} = h_\rho^{(0)}(x) - \sin^2_W h_\rho^{(em)}(x).$$

Für  $N_{F1} = 4$  erhält der neutrale schwache hadronische Strom die explizite Form

$$\begin{aligned} h_\rho^{(n)}(x) = & \bar{u}(x) \left[ \left( +\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma_{\rho,L} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \gamma_{\rho,R} \right] \underline{u}(x) \\ & + \bar{c}(x) \left[ \left( +\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma_{\rho,L} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \gamma_{\rho,R} \right] \underline{c}(x) \\ & + \bar{d}(x) \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma_{\rho,L} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \gamma_{\rho,R} \right] \underline{d}(x) \\ & + \bar{s}(x) \left[ \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \gamma_{\rho,L} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \gamma_{\rho,R} \right] \underline{s}(x). \end{aligned}$$

Wie  $h_\rho^{(0)}(x)$  ist auch  $h_\rho^{(n)}(x)$  diagonal im Flavour. Somit gehorchen die neutralen schwachen Prozesse den Auswahlregeln

$$\Delta Q = \Delta S = \Delta C = \dots = 0.$$

Die Fermi–Theorie der schwachen Wechselwirkung zeichnet sich durch Universalität aus, indem die Quark–Familien im gleichen Maße wie die Lepton–Familien berücksichtigt werden,

- |                |                             |
|----------------|-----------------------------|
| 1. Generation: | $( e, \nu_e ; u, d )$       |
| 2. Generation: | $( \mu, \nu_\mu ; c, s )$   |
| 3. Generation: | $( \tau, \nu_\tau ; t, b )$ |

## 8.2 Das Glashow–Salam–Weinberg–Modell

### 8.2.1 Notwendigkeit einer nichtabelschen Eichtheorie

Versucht man das Problem des schlechten Hochenergieverhaltens der Fermi–Theorie zu lösen, so stößt man auf die Notwendigkeit der Vereinigung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung. Dabei findet man, wie oben diskutiert, die Strukturen einer  $SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}$ –Symmetrie, die auf eine nicht–abelsche Eichtheorie hindeutet. Die ersten Versuche, eine Eichtheorie für die elektroschwache Wechselwirkung erfolgreich zu formulieren, scheiterten an der Tatsache, dass, die intermediären Vektorbosonen wegen der kurzen Reichweite der schwachen Wechselwirkung Masse besitzen, während reine Eichtheorien zu masselosen Eichteilchen führen. Eine Lösung dieses Problems gibt der Higgs–Kibble–Mechanismus für eine dynamische Erzeugung von Masse für Eichteilchen. Hierzu ist die Einführung eines symmetriebrechendes Higgs–Potenzial erforderlich. In der Konsequenz führt das Higgs–Potenzial zur Existenz von massiven skalaren Mesonen (Higgs–Teilchen).

#### Historische Meilensteine

1961 Glashow

- Entwurf der  $SU(2)_{(W)_{\text{eak}}} \times U(1)_{Y_{(W)_{\text{eak}}}}$ –Eichtheorie
- Problem: Eichfelder sind masselos

1967 Weinberg und Salam

- Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung für Leptonen
- Massive Eichteilchen durch symmetriebrechendes Higgs–Potenzial

1970 Glashow et al.

- Erweiterung auf Hadronen

Bei der Konstruktion der GSW–Theorie geht man direkt von der im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Struktur des phänomenologischen Fermi–Modells aus. Dementsprechend beschreibt die GSW–Theorie die Dynamik der elektroschwachen Wechselwirkung als Eichtheorie mit der Gruppe  $SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}$  als spontan gebrochene nichtabelsche Eichgruppe.

## Higgs–Boson

Das Higgs–Boson ist das letzte noch fehlende Teilchen im Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Durch seine Kopplung an alle massiven Teilchen verschafft das Higgs–Boson diesen Masse, welche proportional zur Stärke der Kopplung ist. Das Higgs–Boson, welches Spin Null hat und elektrisch neutral sein sollte, ist zur mathematischen Konsistenz des Standardmodells unbedingt notwendig. Im Rahmen des Standard–Modells ist die Masse auf  $< 1000 \text{ GeV}/c^2$  begrenzt. Aus dem erwarteten Beitrag des Higgs–Teilchens zur Vakuumpolarisation lässt sich die Masse auf  $m_{\text{Higgs}} < 600 \text{ GeV}/c^2$  weiter einschränken. Da das Higgs–Teilchen bei den bisher verfügbaren Beschleunigerenergien nicht gefunden wurde, ergibt sich als untere Massenschranke  $m_{\text{Higgs}} > 58,4 \text{ GeV}/c^2$ . Am „Large–Hadron–Collider“ (LHC) des CERN sollten Schwerpunktsenergien bei Hadron–Stoßexperimenten möglich sein, die zur Erzeugung von freien Higgs–Teilchen ausreichen.

### 1. Eichfelder

Die Eichfelder sind vier Vektorfelder, welche die adjungierte Darstellung der Eichgruppe  $SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}$  aufspannen. Die zum schwachen Isospin gehörigen Eichfelder nennen wir  $W_\mu^a(x)$ , ( $a = 1, 2, 3$ ), und das zur schwachen Hyperladung  $Y_W$  gehörige Eichfeld sei  $B_\mu(x)$ . Der Lagrangian der Eichfelder lautet somit

$$\mathcal{L}_E = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (8.8)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Hierbei sind  $g_1$  und  $g_2$  die Kopplungskonstanten für die schwache Hyperladung und für den schwachen Isospin.

### 2. Fermionen

Die Fermionen ordnen wir in Paare  $i$  gemäß

$$\{ \psi_{\text{FI}} \} = \{ (a^i, b^i) \} = (\nu_e, e^-), (\nu_\mu, \mu^-), (\nu_\tau, \tau^-), \dots, (u, d'), (c, s'), (t, b'), \dots$$

Diese Einteilung wird bei den Leptonen durch die separat erhaltenen Leptonenzahlen nahegelegt.

Die „Primes“ an  $d, s$  und  $b$  weisen darauf hin, dass die Cabbibo–transformierten Felder verwendet werden. Die linkshändigen Felder formieren Isospin–Dubletts, während die rechtshändigen Felder Isospin–Singulett bilden. Die schwache Hyperladung wird so zugeordnet, dass die elektrischen Ladungen der Gell–Mann–Nishijima Beziehung genügen,

$$Q = I_W^{(0)} + \frac{1}{2} Y_W.$$

Somit erhält die Lagrange-Dichte der Fermionen die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = \sum_i \left\{ \bar{\psi}_L^i \gamma^\mu \left( i \partial_\mu + \frac{1}{2} g_2 \tau^a W_\mu^a + \frac{1}{2} g_1 y_i B_\mu \right) \underline{\psi}_L^i \right. \\ \left. + \bar{a}_R^i \gamma^\mu \left( i \partial_\mu + \frac{1}{2} g_1 \alpha_i B_\mu \right) \underline{a}_R^i \right. \\ \left. + \bar{b}_R^i \gamma^\mu \left( i \partial_\mu + \frac{1}{2} g_1 \beta_i B_\mu \right) \underline{b}_R^i \right\}. \end{aligned}$$

Die Gell-Man-Nishijima Relation ist erfüllt, wenn zwischen den schwachen Hyperladungen der rechts- und linkshändigen Felder für  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  die folgenden Beziehungen gelten:

$$\alpha_i = 1 + y_i, \quad \beta_i = -1 + y_i.$$

### 3. Higgs-Potenzial

Wir zielen darauf hin, dass zwei geladene und ein neutrales Eichboson durch den Higgs-Kibble-Mechanismus massiv werden und das Photon masselos bleibt. Um dies zu erreichen, zielen wir darauf hin, dass die  $SU(2)_W \times U(1)_{Y_W}$ -Symmetrie derart spontan gebrochen wird, dass die elektromagnetische Eichgruppe  $U(1)_{\text{em}}$  als Restsymmetrie erhalten bleibt. Hierzu wählen wir zwei komplexe Skalarfelder  $\phi(x) = (\phi^+(x), \phi^0(x))$ , welche ein Dublett des schwachen Isospins bilden und eichinvariant an die Vektorbosonen koppeln. Das entsprechende ladungskonjugierte Higgs-Feld hat die Form  $\tilde{\phi}(x) = (-\phi^{0*}(x), \phi^-(x))$ . Der Lagrangian des Higgs-Feldes einschließlich des symmetriebrechenden Potenzials und der Ankopplung an die Eichfelder und an die Fermionen erhält dann die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \left| \left( \partial_\mu - i \frac{1}{2} g_2 \tau^a W_\mu^a - i \frac{1}{2} g_1 B_\mu \right) \phi \right|^2 - \frac{1}{4} \lambda \left( \phi^\dagger \phi - \frac{1}{2} v^2 \right)^2 \\ & + \sum_{i,j} \left( g_{i,j} \bar{a}_R^i \tilde{\phi}^* \underline{\psi}_L^j - \tilde{g}_{ij} \bar{b}_R^i \phi^* \underline{\psi}_L^j + \text{h.c.} \right). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Dichte der GSW-Theorie ist dann die Summe dieser einzelnen Beiträge:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_H.$$

### 8.2.2 Spontane Symmetriebrechung in der GSW-Theorie

Im Higgs-Potenzial ergibt sich für den Grundzustand die allgemeine Form

$$\phi_0 = e^{i \vec{\eta}^a \tau^a} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Hierbei gibt der Vektor  $\vec{\eta}$  mit Komponenten  $\eta^a$  die Orientierung des Grundzustandes im Isospinraum an. Für einen gegebenen Vektor  $\vec{\eta}$  bricht der Grundzustand die Symmetrie des Higgs-Potenzials. Der Betrag des Grundzustandes nimmt den Wert  $|\phi_0| = v/\sqrt{2}$  ein.

Wir wählen nun die Phase von  $\phi_0$  so, dass die verbleibende Symmetrie die der elektromagnetischen Eichtransformation  $U(1)_{\text{em}}$  ist, welche von der elektrischen Ladung erzeugt wird,

$$Q\phi_0 = (I_W^{(0)} + \frac{1}{2}Y_W)\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix} = 0.$$

Dies wird durch die Wahl  $\vec{\eta} = 0$  erfüllt.

Mit der Wahl  $\vec{\eta} = 0$  besitzen angeregte Zustände die Form

$$\phi(x) = e^{i\zeta^a(x)\tau^a/2v} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix}.$$

Hierbei entspricht das skalare Feld  $\rho(x)$  der massiven radialen Anregung im Higgs-Potenzial, während die drei Phasenfelder  $\xi^a(x)$  masselose Goldstone-Anregungen beschreiben.

## Elimination der Goldstone-Anregungen

Vermöge der Eichtransformationsfunktion

$$g(x) = e^{-i\zeta^a(x)\tau^a/2v}$$

können die Goldstone-Felder „weggeicht“ werden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = g(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix} \\ \psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = g(x)\psi_L(x) \\ g_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \tau^a W_\mu^a(x) &\rightarrow g_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \tau^a W'_\mu^a(x) = g(x) \left( -i\partial_\mu + g_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \tau^a W_\mu^a(x) \right) g^{-1}(x) \end{aligned}$$

Die Isospin-Singulett-Felder  $\psi_R(x)$  und das zur schwachen Hyperladung gehörige Eichfeld  $B^\mu(x)$  bleiben von dieser Eichtransformation unberührt.

Nach Elimination der Goldstone-Felder erhält die Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{Int}}$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \frac{1}{2} \lambda v^2 \rho^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Fermion}} = & + \bar{e}_R i \not{\partial} \underline{e}_R + \bar{L}_e i \not{\partial} \underline{L}_e - G_e \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R \underline{e}_L + \bar{e}_L \underline{e}_R) \\ & + \bar{\mu}_R i \not{\partial} \underline{\mu}_R + \bar{L}_\mu i \not{\partial} \underline{L}_\mu - G_\mu \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{\mu}_R \underline{\mu}_L + \bar{\mu}_L \underline{\mu}_R) \\ & + \bar{\tau}_R i \not{\partial} \underline{\tau}_R + \bar{L}_\tau i \not{\partial} \underline{L}_\tau - G_\tau \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{\tau}_R \underline{\tau}_L + \bar{\tau}_L \underline{\tau}_R) \\ & + \text{Beiträge der Quarks} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Eich}} = & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{8} v^2 \left[ (g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3)^2 + g_2^2 \underbrace{(W_\mu^1 W^{1,\mu} + W_\mu^2 W^{2,\mu})}_{= 2 W_\mu^+ W^{-,\mu}} \right] \end{aligned}$$

Wir können aus dem in den Feldern quadratischen Anteil der Lagrangedichte schließen:

- Das Higgs-Boson hat die Masse  $v\sqrt{\lambda/2}$
- Die Neutrinos bleiben masselos
- Die leptonischen Massen sind  $M_e = G_e v/\sqrt{2}$ ,  $M_\mu = G_\mu v/\sqrt{2}$  und  $M_\tau = G_\tau v/\sqrt{2}$
- Das geladene Vektorfeld  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm i W_\mu^2)$  ist ebenfalls massiv,

$$M_{W^\pm} = \frac{1}{2} v g_2 .$$

- Die quadratische Form in  $B_\mu$  und  $W_\mu^3$  kann diagonalisiert werden gemäß

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (-g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3), \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (+g_2 B_\mu + g_1 W_\mu^3), \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \\ M_A &= 0. \end{aligned}$$

Das neutrale  $Z$ -Boson erhält also Masse während das Photon masselos bleibt.

Der Beitrag  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  in  $\mathcal{L}$  beschreibt die Wechselwirkung der Felder untereinander. Ausgedrückt durch die physikalischen Felder  $W_\mu^\pm(x)$ ,  $Z_\mu(x)$  und  $A_\mu(x)$  erhält der leptonische Wechselwirkungsterm die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int,Lept}} = & -q \bar{e} \gamma^\mu \underline{e} A_\mu \\ & + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma^5) \underline{e} W_\mu^+ + \text{h.c.}] . \\ & - \frac{g_2}{4 \cos \Theta_W} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma^5) \underline{\nu}_e - \bar{e} \gamma^\mu (\mathbf{1} - 4 \sin^2 \Theta_W \mathbf{1} - \gamma^5) \underline{e}] Z_\mu \\ & + \{e \rightarrow \mu\} + \{e \rightarrow \tau\} \end{aligned}$$

Der in Abschnitt 8.1.1 eingeführte Weinberg–Winkel hängt mit den Kopplungsparametern wie folgt zusammen

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \tan \theta_W = \frac{g_1}{g_2}, \quad (8.10)$$

bzw.

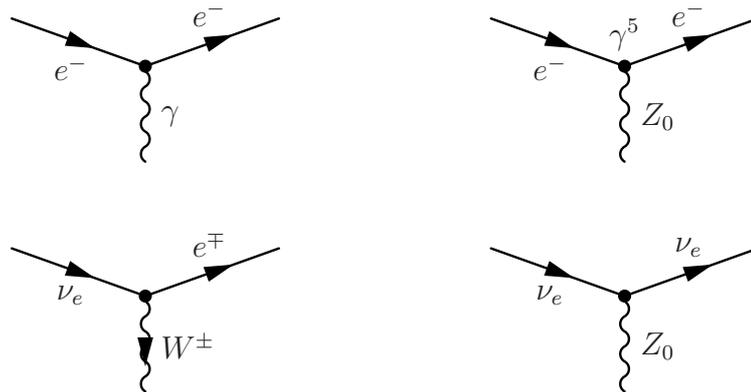
$$e = g_1 \cos \theta_W = g_2 \sin \theta_W . \quad (8.11)$$

Hierbei ist  $e$  die übliche elektromagnetische Kopplungskonstante an das Viererpotential  $A_\mu(x)$ . Die Kopplungskonstanten  $g_2$  entspricht  $g_W$  und der Zusammenhang mit der Fermischen Konstanten  $G_F$  ist in Gl. (8.7) gegeben.

Aus den Niederenergieparametern  $G_F$ ,  $\alpha = e^2/4\pi$ ,  $\sin^2 \theta_W$  können somit die Massen der Eichbosonen und die beiden Kopplungskonstanten  $g_1$  und  $g_2$  bestimmt werden. Der einzige verbleibende freie Parameter ist der Stärkeparameter  $\lambda$  des Higgs-Potenzials.

Abschließend fassen wir zusammen:

Die GSW–Theorie führt auf die folgenden leptonischen Elementarprozesse:



Entsprechende Diagramme gelten für die zweite und dritte Leptonfamilie sowie für die Ankopplung der Vektorbosonen an die Quarkströme.